恒定磁场与磁力

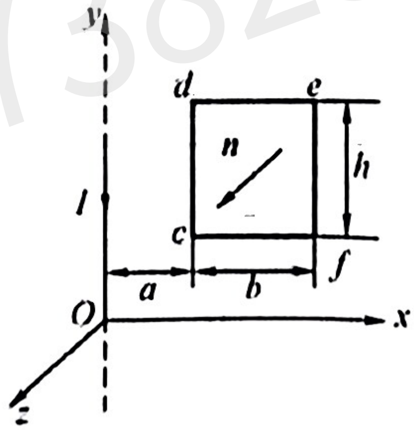
1、有一个圆形回路 1 及一个正方形回路 2，圆的直径和正方形的边长相等，二者中通有大小相等的电流，它们在各自中心产生的磁感强度的大小之比 $\dfrac{B_1}{B_2}$ 为多少？

【正解】1.11

【解析】设电流大小为I，圆的直径和正方形边长均为R，则

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2R}，B_2=4\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos 45°-\cos 135°)=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi R}，\therefore \frac{B_1}{B_2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1.11.$$

2、在无限长直载流导线产生的磁场中，有一个与导线共面的矩形平面线圈$cdef$，线圈cd和ef边与长直导线平行，线圈尺寸和其与长导线的距离如图所示. 现在使平面线圈沿其平面法线方向$\vec{n}$（平行z轴）移动Δz距离。求：在此位置上通过线圈的磁通量。



【正解】$\dfrac{\mu_0 Ih}{\pi}\ln\dfrac{(a+b)^2+\Delta z^2}{a^2+\Delta z^2}$

【解析】在线圈距离c点l处取一竖向面积元dl，则该处的磁通量为：

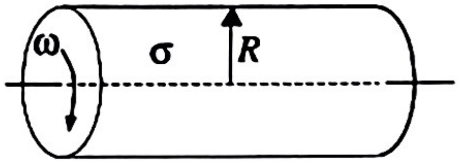
$$d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{\Delta z^2+(a+l)^2}}\cdot h dl\cdot\frac{a+l}{\sqrt{\Delta z^2+(a+l)^2}}=\frac{\mu_0 I(a+l)h}{2\pi[\Delta z^2+(a+l)^2]}dl$$

则线圈的磁通量为：

$$\Phi=\int d\Phi=\int_0^b\frac{\mu_0 I(a+l)h}{2\pi[\Delta z^2+(a+l)^2]}dl=\frac{\mu_0 Ih}{4\pi}\ln\frac{(a+b)^2+\Delta z^2}{a^2+\Delta z^2}$$

[redacted]

3、如图所示，一半径为R的均匀带电无限长直圆筒，面电荷密度为σ，该筒以角速度ω绕其轴线匀速旋转。试求圆筒内部的磁感强度。

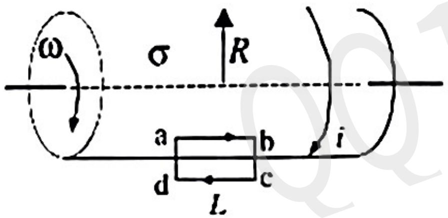


【正解】$\vec{B}=\mu_0\sigma R\vec{\omega}$

【学解】带电圆筒旋转相当于圆筒表面有面电流，单位长度上电流为：

$$i=\frac{q}{T}=\frac{2\pi R\sigma}{2\pi/\omega}=R\sigma\omega$$

与长直通电螺线管内磁场分布类似，圆筒内为均匀磁场，$\vec{B}$的方向与角速度一致（若$\sigma<0$，则相反）。



圆筒外$B=0$．作如图所示的安培环路L，由安培环路定理：

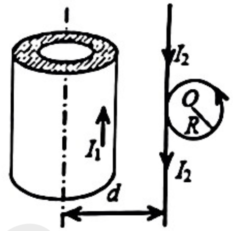
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{L}=B\cdot\overline{ab}=\mu_0\overline{ab}\cdot i$$

得圆筒内的磁感应强度大小为：

$$B=\mu_0 i=\mu_0\sigma R\omega$$

写成矢量式：$$\vec{B}=\mu_0\sigma R\vec{\omega}$$

4、有一长直导体圆管，内外半径分别为R_1和R_2，如图所示，它所载的电流I_1均匀分布在其横截面上。导体旁边有一绝缘“无限长”直导线，载有电流I_2，且在中部绕了一个半径为R的圆圈。设导体管的轴线与长直导线平行，相距为d，而且它们与导体圆圈共面，求：圆心O点处的磁感强度B.



【正解】$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_2}{R}+\frac{\pi I_2}{R}-\frac{I_1}{R+d}\right)$，方向垂直纸面向外

【学解】长直载流导体圆管在O点产生的磁感强度大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(R+d)}\text{，方向垂直纸面向里}$$

电流I_2的长直导线在O点产生的磁感强度大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}\text{，方向垂直纸面向外}$$

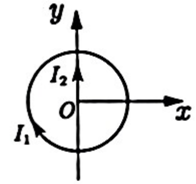
电流I_2的圆线圈在O点产生的磁感强度大小为

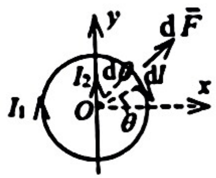
$$B_3=\frac{\mu_0 I_2}{2R}\text{，方向垂直纸面向外}$$

所以，在O点产生的磁感强度大小为

$$B=-B_1+B_2+B_3=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_2}{R}+\frac{\pi I_2}{R}-\frac{I_1}{R+d}\right)\text{，方向垂直纸面向外}$$

5、在xOy平面内有一圆心在O点的圆线圈，通以顺时针绕向的电流I_1，另有一无限长直导线与通有电流I_2，方向向上，如图所示。求：此时圆线圈所受的磁力。





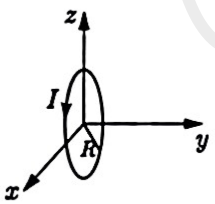
【正解】$F=\mu_0 I_1 I_2$，方向沿x轴正方向

【 】设圆半径为R，选一微分元dl，它所受磁力大小为$dF=I_1 dl\cdot B$，其中$B=\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi R\cos\theta}$. 由于对称性，$y$轴方向的合力为零，

$$\therefore dF_x=dF\cos\theta=I_1 Rd\theta\frac{\mu_0 I_2}{2\pi R\cos\theta}\cos\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}d\theta$$

$$\therefore F=F_x=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}d\theta=\mu_0 I_1 I_2$$，方向沿x轴正方向.

6、如图所示，一半径为R的圆形线圈可绕z轴自由转动，其转动惯量为J，并通有电流I. 初始时线圈静止于xz平面，且处于沿y方向的匀强磁场B中。若将线圈转过一个小角度θ，并静止地释放，则线圈回到初始状态所需的时间是多少？



【正解】$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi J}{R^2 IB}}$

【 】磁力矩：$M=BIS\sin\theta=\pi R^2 IB\sin\theta\approx\pi R^2 IB\theta$

由转动定律：$J\alpha=J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-M$，即$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{\pi R^2 IB}{J}\theta=0$

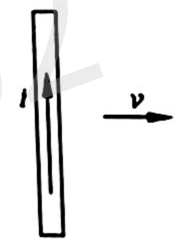
$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{\pi R^2 IB}{J}}$$

线圈回到初始状态所需的时间为 $t=\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{2\omega}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi J}{R^2 IB}}$.

7、有一无限大平面导体薄板，自下而上通有电流。已知其电流面密度为i.

（1）试求板外空间任一点的磁感应强度；

（2）有一质量为m、带电量为$q(q>0)$的粒子，以速度v沿平板法线方向向外运动，求带电粒子最初至少在距板什么位置处不与大平板碰撞，需经多长时间才能回到初始位置？



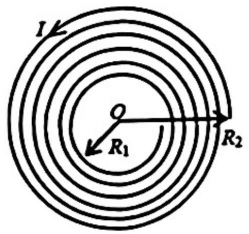
【正解】（1）$B=\dfrac{1}{2}\mu_0 i$，方向：板右侧垂直纸面向里，板左侧垂直纸面向外；

（2）$R=\dfrac{2mv}{q\mu_0 i}$；$T=\dfrac{4\pi m}{q\mu_0 i}$.

】（1）由安培环路定理：$B=\dfrac{1}{2}\mu_0 i$，方向：板右侧垂直纸面向里，板左侧垂直纸面向外.

（2）$qvB=m\dfrac{v^2}{R}\Rightarrow R=\dfrac{mv}{qB}=\dfrac{2mv}{q\mu_0 i}$，返回时间：$T=\dfrac{2\pi R}{v}=\dfrac{4\pi m}{q\mu_0 i}$.

8、如图所示，有一密绕平面螺旋线圈，其上通有电流I，总匝数为N，它被限制在半径为R_1和R_2的两个圆周之间。求：此螺旋线中心O处的磁感强度。



【正解】$B=\dfrac{\mu_0 NI}{2(R_2-R_1)}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$，方向垂直纸面向外

以O点为圆心、r为半径，在线圈平面内取宽度为dr的圆环面积，在此环面积内含有

$dN=ndr=\dfrac{Ndr}{R_2-R_1}$匝线圈，其相应的元电流为$dI=IdN$，其在中心$O$点产生的元磁场为

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0 NIdr}{2r(R_2-R_1)}$$

则O点处的磁感强度为

$$B=\int dB=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 NIdr}{2r(R_2-R_1)}=\frac{\mu_0 NI}{2(R_2-R_1)}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

该磁感强度方向垂直纸面向外。

9、一电子以速度v垂直地进入磁感应强度为B的均匀磁场中，如图所示。求：此电子在磁场中运动轨道所围的面积内的磁通量为多少？

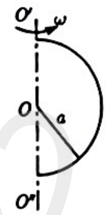
【正解】$\Phi=\dfrac{\pi m^2v^2}{e^2B}$

】$evB=m\dfrac{v^2}{R}$，可得电子运动半径为：$R=\dfrac{mv}{eB}$

磁通量为：$\Phi=BS=B\pi R^2=\dfrac{\pi m^2v^2}{e^2B}$

10、如图所示，半径为a，带正电荷且线密度是λ（常量）的半圆以角速度ω绕轴$O'O''$匀速旋转。

求：（1）O点的$\vec{B}$；（2）旋转的带电半圆的磁矩$\overrightarrow{p_m}$（积分公式$\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta=\dfrac{\pi}{2}$）.



【正解】(1) $B=\dfrac{\mu_0\omega\lambda}{8}$，方向向上；(2) $p_m=\dfrac{\pi\omega\lambda a^3}{4}$，方向向上.

】(1) 在半圆上取一段与$O'O''$轴成θ角的$d\theta$弧元，其旋转形成的元电流：

$$dI=\frac{\omega}{2\pi}dq=\frac{\omega\lambda}{2\pi}ad\theta$$

它在O点产生的磁感应强度（此处应用圆环形电流在轴线上的磁感应强度公式$B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$）

为：

$$dB=\frac{\mu_0 a^2\sin^2\theta}{2a^3}\cdot\frac{\omega\lambda}{2\pi}ad\theta=\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\sin^2\theta d\theta$$

$$B=\int dB=\int_0^\pi\frac{\mu_0\omega\lambda}{4\pi}\sin^2\theta d\theta=\frac{\mu_0\omega\lambda}{8}，方向向上.$$

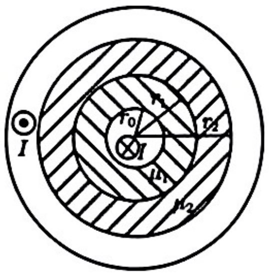
（2）
$$dp_m=SdI=\pi a^2\sin^2\theta\frac{\omega\lambda}{2\pi}ad\theta=\frac{1}{2}\omega\lambda a^3\sin^2\theta d\theta$$

$$p_m=\int dp_m=\int_0^\pi\frac{1}{2}\omega\lambda a^3\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi\omega\lambda a^3}{4}，方向向上.$$

11、一长直同轴电缆的横断面，如图所示，电流I由外部流出，内部流入。两电流之间填充有两种磁介质，其磁导率分别为μ_1和μ_2．求：

（1）两种介质中的磁场强度H_1和H_2、磁感应强度B_1和B_2以及磁化强度M_1和M_2；

（2）两介质交界面处的磁化电流I_m及磁化面电流密度j_s．

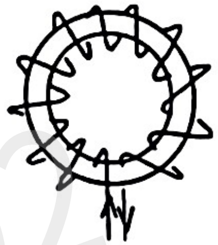


【正解】(1) $H_1=\dfrac{I}{2\pi r}$(顺时针)，$H_2=\dfrac{I}{2\pi r}$(顺时针)，$B_1=\dfrac{\mu_0\mu_1 I}{2\pi r}$(方向与$\overrightarrow{H_1}$相同)，$B_2=\dfrac{\mu_0\mu_2 I}{2\pi r}$(方向与$\overrightarrow{H_2}$相同)，$M_1=\dfrac{(\mu_1-1)I}{2\pi r}$($\mu_1>1$则方向与$\overrightarrow{H_1}$相同，反之相反)，$M_2=\dfrac{(\mu_2-1)I}{2\pi r}$($\mu_2>1$则方向与$\overrightarrow{H_2}$相同，反之相反)；(2) $I_m=|\mu_2-\mu_1|I$，$j_s=\dfrac{|\mu_2-\mu_1|I}{2\pi r_1}$

】(1) 由安培环路定理$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i$，可求轴心为$r$处的各参量：$r_0<r<r_1$时，$H_1\cdot 2\pi r=I$，$\therefore H_1=\dfrac{I}{2\pi r}$（根据右手定则，方向为顺时针），$B_1=\mu_0\mu_1 H_1=\dfrac{\mu_0\mu_1 I}{2\pi r}$（方向与$\overrightarrow{H_1}$相同），$M_1=(\mu_1-1)H=\dfrac{(\mu_1-1)I}{2\pi r}$（$\mu_1>1$则方向与$\overrightarrow{H_1}$相同，反之相反）；$r_1<r<r_2$时，$H_2\cdot 2\pi r=I$，$\therefore H_2=\dfrac{I}{2\pi r}$（根据右手定则，方向为顺时针），$B_2=\mu_0\mu_2 H_2=\dfrac{\mu_0\mu_2 I}{2\pi r}$（方向与$\overrightarrow{H_2}$相同），$M_2=(\mu_2-1)H=\dfrac{(\mu_2-1)I}{2\pi r}$（$\mu_2>1$则方向与$\overrightarrow{H_2}$相同，反之相反）．

（2）$j_s=|M_2|_{r=r_1}-M_1|_{r=r_1}|=\dfrac{|\mu_2-\mu_1|I}{2\pi r_1}$，$I_m=j_s\cdot 2\pi r_1=|\mu_2-\mu_1|I$．

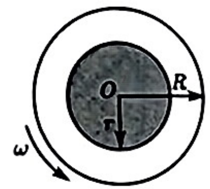
12、如图所示的一细螺绕环，它由表面绝缘的导线在铁环上密绕而成，每厘米绕10匝，当导线中的电流I为2.0A时，测得铁环内的磁感应强度B的大小为1.0T，求：该铁环的相对磁导率μ_r为多少？（真空磁导率$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$）



【正解】3.98×10^2

】$B=\mu nI=\mu_0\mu_r\dfrac{N}{l}I$，$\therefore \mu_r=\dfrac{B}{\mu_0\frac{N}{l}I}=\dfrac{1.0}{4\pi\times10^{-7}\times\frac{10}{0.01}\times2.0}=3.98\times10^2$．

13、如图所示，一半径为R的带电塑料圆盘，半径为r的阴影部分均匀带正电荷，面电荷密度为$+\sigma$，其余部分均匀带负电荷，面电荷密度为$-\sigma$当圆盘以角速度ω旋转时，测得圆盘中心O点的磁感强度为零。求R与r满足的关系。



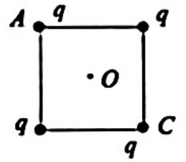
【正解】$R=2r$

】带电圆盘旋转可视为无数电流圆环，取半径为ρ，宽为$d\rho$的电流圆环，在O点的磁场为：

$$dB=\frac{\mu_0 di}{2\rho}=\frac{\mu_0}{2\rho}\cdot\sigma 2\pi\rho d\rho\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega d\rho$$

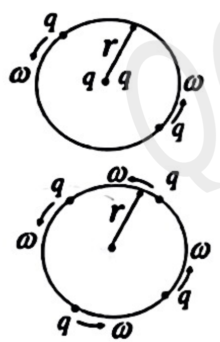
$$B=\int_0^r\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega d\rho-\int_r^R\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega d\rho=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega[r-(R-r)]=0，\therefore R=2r.$$

14、如图所示，边长为a的正方形的四个角上固定有四个电荷均为q的点电荷。此正方形以角速度ω绕AC轴旋转时，求其在中心O点产生的磁感强度大小为B_1；若此正方形以角速度ω绕过O点垂直于正方形平面的轴旋转时，求其在O点产生的磁感强度的大小B_2，并求B_1与B_2间的比值。



【正解】$B_1=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi r}$；$B_2=\frac{\mu_0 q\omega}{\pi r}$；$B_1=0.5B_2$.

】电荷运动如图所示，



以AC为轴旋转时：$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\cdot\frac{2q}{2\pi/\omega}=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi r}$

绕O点旋转时：　$B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\cdot\frac{4q}{2\pi/\omega}=\frac{\mu_0 q\omega}{\pi r}$

$\therefore B_1=0.5B_2$

电磁感应与电磁场

15、一半径$r=10\text{cm}$的圆形闭合导线回路置于均匀磁场$\vec{B}$（$B=0.80\text{T}$），$\vec{B}$与回路平面正交。若圆形回路的半径从$t=0$开始以恒定的速率（$\frac{dr}{dt}=-80\text{cm/s}$）收缩，则在$t=0$时刻闭合回路的感应电动势的大小是多少？如果要求感应电动势保持这一数值，则闭合回路面积应以怎样的恒定速率收缩？

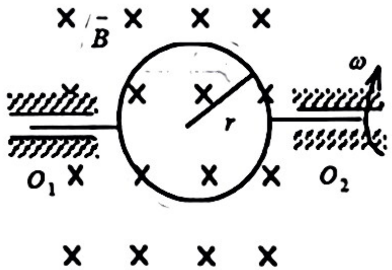
【正解】$\varepsilon_i=0.4\text{V}$；$\frac{dS}{dt}=-0.5\text{m}^2/\text{s}$

】$t=0$时刻圆形回路的磁通量：$\Phi=B\pi r^2$，则感应电动势：$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-2\pi rB\frac{dr}{dt}=0.4\text{V}$

若要感应电动势保持这一数值，则：$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-B\frac{dS}{dt}=0.4\text{V}$，解得：$\frac{dS}{dt}=-0.5\text{m}^2/\text{s}$.

16、如图所示，有一半径为$r=10\text{cm}$多匝圆形线圈，匝数$N=100$，置于均匀磁场$\vec{B}$中（$B=0.5\text{T}$）。圆形线圈可绕通过圆心的轴O_1O_2转动，转速$n=600\text{r/min}$．求圆线圈自图示的初始位置转过$\frac{\pi}{2}$时：

（1）线圈中的瞬时电流值（线圈的电阻$R=100\Omega$，不计自感）；（2）圆心处的磁感强度。



【正解】（1）$I=0.987\text{A}$；（2）$B_O\approx0.5\text{T}$，方向与磁场$\vec{B}$的方向基本相同

】（1）设线圈转至任意位置时圆线圈的法向与磁场之间的夹角为θ，则通过该圆线圈平面的磁通量为：$\Phi=B\pi r^2\cos\theta=B\pi r^2\cos(2\pi nt)$

在任意时刻线圈中的感应电动势为：

$$\varepsilon_i=-N\frac{d\Phi}{dt}=NB\pi r^2\cdot 2\pi n\sin(2\pi nt)=2NB\pi^2r^2n\sin(2\pi nt)$$

感应电流为：

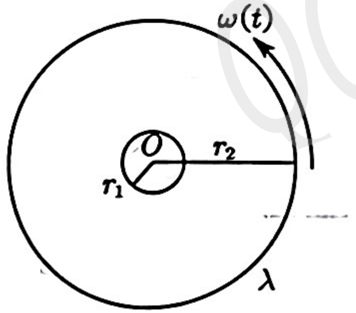
$$i=\frac{\varepsilon_i}{R}=\frac{2NB\pi^2r^2n}{R}\sin(2\pi nt)$$

当线圈自图示的初始位置转过$\frac{\pi}{2}$时，$t=\frac{T}{4}=\frac{1}{4n}$，则$I=\frac{2NB\pi^2r^2n}{R}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.987\,\mathrm{A}$.

（2）线圈中电流在圆心处激发的磁场为：$B_1=\frac{\mu_0NI}{2r}=6.2\times10^{-4}\mathrm{T}$，方向向下

故圆心处的磁感强度为：$B_O=\sqrt{B^2+B_1^2}\approx0.5\mathrm{T}$，方向与磁场$\vec{B}$的方向基本相同。

17、如图所示，一半径为r_2、电荷线密度为λ的均匀带电圆环，里面有一半径为r_1、总电阻为R的导体环，两环共面同心（$r_2\gg r_1$），当大环以角速度$\omega(t)$绕垂直于环面的中心轴旋转时，求小环中的感应电流，其方向如何？



【正解】$i=-\frac{\mu_0\pi r_1^2\lambda}{2R}\frac{d\omega(t)}{dt}$，方向：$\frac{d\omega(t)}{dt}>0$时，顺时针；$\frac{d\omega(t)}{dt}<0$时，逆时针

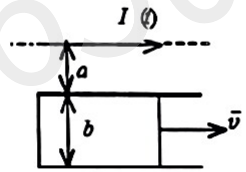
】大环旋转产生的电流：$I=\frac{\lambda\cdot2\pi r_2}{2\pi/\omega}=\lambda\omega r_2$

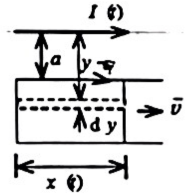
其在小环中心产生的磁感应强度：$B=\frac{\mu_0I}{2r_2}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}$

则感应电动势为：$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\pi r_1^2\frac{dB}{dt}=-\frac{\mu_0\pi r_1^2\lambda}{2}\frac{d\omega(t)}{dt}$

感应电流：$i=\frac{\varepsilon_i}{R}=-\frac{\mu_0\pi r_1^2\lambda}{2R}\frac{d\omega(t)}{dt}$，方向：$\frac{d\omega(t)}{dt}>0$时，顺时针；$\frac{d\omega(t)}{dt}<0$时，逆时针。

18、如图所示，真空中一长直导线通有电流$I(t)=I_0e^{-\lambda t}$（式中I_0、λ为常量，t为时间），有一带滑动边的矩形导线框与长直导线平行共面，二者相距a. 矩形线框的滑动边与长直导线垂直，它的长度为b，并且以匀速v（方向平行长直导线）滑动。若忽略线框中的自感电动势，并设开始时滑动边与对边重合，试求任意时刻t在矩形线框内的感应电动势ε_i，并讨论ε_i的方向。





【正解】$\varepsilon_i=\frac{\mu_0vI_0e^{-\lambda t}(\lambda t-1)}{2\pi}\left(\ln\frac{a+b}{a}\right)$，方向：$\lambda t<1$时，逆时针；$\lambda t>1$时，顺时针

】设顺时针为ε_i的正方向，任意时刻的磁通量为

$$\Phi(t)=\int BdS=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0I}{2\pi r}\cdot(vt)\cdot dr=\frac{\mu_0Ivt}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

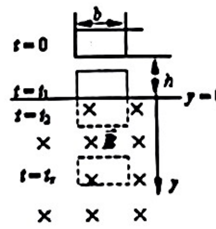
则感应电动势为：

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi(t)}{dt}=-\frac{\mu_0v}{2\pi}\left(\ln\frac{a+b}{a}\right)\left(t\frac{dI}{dt}+I\right)=\frac{\mu_0vI_0e^{-\lambda t}(\lambda t-1)}{2\pi}\left(\ln\frac{a+b}{a}\right)$$

方向：$\lambda t<1$时，逆时针；$\lambda t>1$时，顺时针。

19、由质量为m、电阻为R的均匀导线做成的矩形线框，宽为b，在$t=0$时由静止下落，这时线框的下底边在$y=0$平面上方高度为h处，如图所示。$y=0$平面以上没有磁场；$y=0$平面以下则有

匀强磁场B，其方向在图中垂直纸面向里。现已知在时刻$t=t_1$和$t=t_2$，线框位置如图所示。求：线框速率v与时间t的函数关系（不计空气阻力，且忽略线框自感）。



【正解】$v=\begin{cases} gt & 0\leqslant t\leqslant t_1 \\ \dfrac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\dfrac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)e^{\frac{B^2b^2}{mR}(t_1-t)}\right] & t_1<t\leqslant t_2 \\ \dfrac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\dfrac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)e^{\frac{B^2b^2}{mR}(t_1-t_2)}\right]+g(t-t_2) & t>t_2 \end{cases}$

】①在线框进入磁场之前（$0\leqslant t\leqslant t_1$）线框做自由落体运动，$v=gt$

当$t=t_1=\sqrt{\frac{2g}{h}}$时，$v=v_1=\sqrt{2gh}$

②线框底边进入磁场后（$t_1<t\leqslant t_2$），产生感应电流，受到一向上的磁力：

$$F=BIb=Bb\cdot\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}=Bb\cdot\frac{1}{R}\cdot Bb\frac{dy}{dt}=\frac{B^2b^2}{R}v$$

由牛顿第二定律得：

$$mg-\frac{B^2b^2}{R}v=m\frac{dv}{dt}$$

求解得：

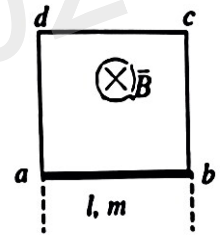
$$v=\frac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\frac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)e^{\frac{B^2b^2}{mR}(t_1-t)}\right]$$

当$t=t_2$时，$v=v_2=\dfrac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\dfrac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)e^{\frac{B^2b^2}{mR}(t_1-t_2)}\right]$

③当线框全部进入磁场后（$t>t_2$），通过线框的磁通量不随时间变化，所受磁力为零，故线框在重力作用下作匀加速下落，$v=v_2+g(t-t_2)$，即

$$v=\frac{mR}{B^2b^2}\left[g-\left(g-\frac{B^2b^2\sqrt{2gh}}{mR}\right)e^{\frac{B^2b^2}{mR}(t_1-t_2)}\right]+g(t-t_2)$$

20、如图所示，在竖直平面内有一矩形导体回路$abcd$置于均匀磁场$\vec{B}$中，$\vec{B}$的方向垂直于回路平面，$abcd$回路中的ab边的长为l，质量为m，可以在保持良好接触的情况下下滑，且摩擦力不计。ab边的初速度为零，回路电阻R集中在ab边上。（1）求任意时刻ab边的速率v和t的关系；（2）设两竖直边足够长。最后达到稳定的速率为多少？



【正解】（1）$v=\dfrac{mgR}{B^2l^2}\left(1-e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$；（2）$v=\dfrac{mgR}{B^2l^2}$

（1）ab边上感应电流的大小为：$I=\dfrac{|\varepsilon_i|}{R}=\dfrac{Blv}{R}$

则ab边所受安培力：$F=BIl=\dfrac{B^2l^2v}{R}$，方向向上

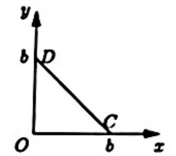
由牛顿第二定律：$mg-\dfrac{B^2l^2v}{R}=m\dfrac{dv}{dt}$

分离变相积分解得：$v=\dfrac{mgR}{B^2l^2}\left(1-e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$.

（2）最后达到稳定速率：$v=\dfrac{mgR}{B^2l^2}$.

21、有一三角形闭合导线OCD，如图所示放置。在这个三角形区域中的磁感强度为$\vec{B}=B_0x^2ye^{-at}\vec{k}$，

式中B_0和a是常量，$\vec{k}$为z轴方向单位矢量。求：导线中的感生电动势。



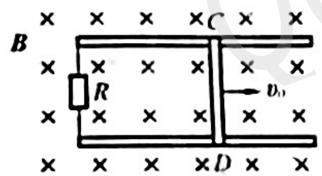
【正解】$\varepsilon_i=\dfrac{aB_0b^5e^{-at}}{60}$，$\varepsilon_i$的方向与$\vec{k}$成右旋关系

】CD直线方程为：$y=b-x$

三角形闭合导线的磁通量为：$\Phi_m=\int_0^b\int_0^{b-x}B_0x^2ye^{-at}dydx=\dfrac{B_0b^5e^{-at}}{60}$

感应电动势为：$\varepsilon_i=-\dfrac{d\Phi_m}{dt}=\dfrac{aB_0b^5e^{-at}}{60}$，$\varepsilon_i$的方向与$\vec{k}$成右旋关系。

22、如图所示，平行导轨上放置一金属杆CD，质量为m，长为L. 在导轨的上端接有电阻R，匀强磁场B垂直导轨平面向里。当CD杆以初速度v_0向右运动时，求：（1）CD杆能够移动的距离；（2）在移动过程中电阻R上放出的焦耳热为多少？



【正解】（1）$\dfrac{mRv_0}{B^2L^2}$；（2）$\dfrac{1}{2}mv_0^2$

】（1）CD杆所受安培力：

$$F=BIL=B\frac{\varepsilon_i}{R}L=B\frac{BLv}{R}L=\frac{B^2L^2v}{R}$$

则有

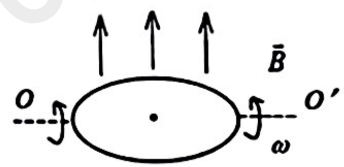
$$-\frac{B^2L^2v}{R}=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x dx=\int_{v_0}^0-\frac{mR}{B^2L^2}dv$$

$$\therefore x=\frac{mRv_0}{B^2L^2}$$

（2）$Q=\dfrac{1}{2}mv_0^2$.

23、如图所示，由质量密度为ρ，电导率为σ的均匀细导线制成的圆环，在磁感强度为$\vec{B}$的均匀磁场中，绕着通过圆环直径的固定光滑轴旋转OO'. 已知$t=0$时，圆环面与$\vec{B}$垂直，角速度为ω. 假设损耗的能量全部变成焦耳热，求：它的角速度降低到初始值的$\dfrac{1}{e}$所需的时间。



【正解】$\dfrac{4\rho}{\sigma B^2}$

】设圆环半径为a，绕图示轴的转动惯量为J，细导线横截面为A. 在t时刻，圆环所围面积的法向与$\vec{B}$的方向的夹角为$\theta=\omega t$

磁通量为：$\Phi=\pi a^2B\cos\omega t$，感应电动势为：$\varepsilon_i=-\dfrac{d\Phi}{dt}=\pi a^2B\omega\sin\omega t$

能量损失的功率为：$P=I^2R=\left(\dfrac{\varepsilon_i}{R}\right)^2R=\dfrac{(\pi a^2B\omega\sin\omega t)^2}{R}$，其中$R=\dfrac{2\pi a}{\sigma A}$

每旋转一周能量损失的平均功率为：$\overline{P}=\dfrac{1}{T}\int_0^T\dfrac{(\pi a^2B\omega\sin\omega t)^2}{R}dt=\dfrac{(\pi a^2B\omega)^2}{2R}$

由根据能量守恒要求，得：$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{J\omega^2}{2}\right)=-\dfrac{(\pi a^2B\omega)^2}{2R}$，其中$J=\dfrac{1}{2}ma^2$，$m=2\pi aA\rho$

解得：$\frac{d\omega}{dt}+\frac{\sigma B^2}{4\rho}\omega=0$，积分得：$\omega=\omega_0 e^{-\frac{\sigma B^2}{4\rho}t}$

故角速度降低到初始值的$\frac{1}{e}$所需的时间为：$\frac{1}{e}\omega_0=\omega_0 e^{-\frac{\sigma B^2}{4\rho}t}\Rightarrow t=\frac{4\rho}{\sigma B^2}$.

24、一个半径为0.01m，长为0.10m的长直密绕螺线管，共1000匝线圈，总电阻为7.76Ω。求：

（1）如把线圈接到电动势为2.0V的电池上，电流稳定后，线圈中所储存的磁能有多少，磁能密度是多少；

（2）从接通电路时算起，要使线圈储存磁能为最大磁能的一半，需经过多少时间？

【正解】（1）$W_m=1.31\times10^{-4}\text{J}$，$\omega_m=4.17\text{J/m}^3$；（2）$t=6.25\times10^{-4}\text{s}$

（1）密绕长直螺线管在忽略端部效应时，其自感为：$L=\frac{\mu_0 N^2 S}{l}=3.95\times10^{-3}\text{H/m}$

电流稳定后，线圈中的电流为：$I=\frac{\varepsilon}{R}$

则线圈中所储存的磁能为：$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{L\varepsilon^2}{2R^2}=1.31\times10^{-4}\text{J}$

又由$W_m=V\omega_m=Sl\omega_m$，得磁能密度：$\omega_m=\frac{W_m}{Sl}=\frac{W_m}{\pi r^2 l}=4.17\text{J/m}^3$.

（2）自感为L，电阻为R的线圈接到电动势为ε的电源上，其电流变化规律为$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$，

当电流电流稳定后，其最大值：$I=\frac{\varepsilon}{R}$

按题意，$\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}LI^2$，即$i=\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2R}$，将其带入$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$中，得

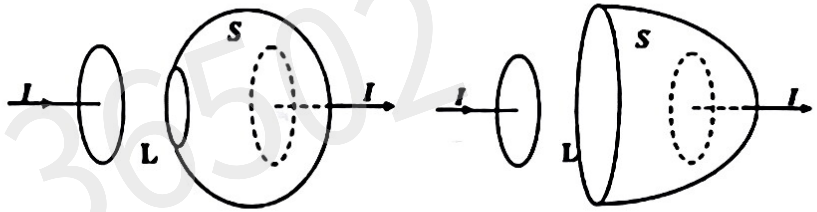
$$t=-\frac{L}{R}\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3.95\times10^{-3}}{7.76}\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6.25\times10^{-4}\text{s}$$

25、已知平行板电容器的电容C为20.0μF，两板上的电压变化率为$\frac{dU}{dt}=1.50\times10^5\text{V/s}$，求：该平行板电容器中的位移电流。

【正解】3A

$$I_D=Sj_D=S\frac{d(\varepsilon_0 E)}{dt}=\frac{dQ}{dt}=\frac{d(CU)}{dt}=C\frac{dU}{dt}=3\text{A}.$$

26、平行板电容器由半径为R的两块圆形极板构成，用长直电流给其充电，使极板间电场强度增加率为$\frac{dE}{dt}$，L为两极板间以r为半径，圆心在电容器对称轴上，圆平面与极板平行的圆。以L为边界，作曲面S使圆平面与S形成闭合曲面以包围电容器的一个极板，如图所示。求：（1）$r<R$时通过曲面S的全电流；（2）$r>R$时通过曲面S的全电流。



【正解】（1）$\pi r^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$；（2）$\pi R^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$

】（1）$r<R$时，穿过以L为边界圆平面的传导电流为零，圆面积为$S=\pi r^2$，电位移通量为$\Psi_D=SD=\pi r^2\varepsilon_0 E$，位移电流为

$$I_D=\frac{d\Psi_D}{dt}=\pi r^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

所以穿过曲面S的全电流等于穿过圆平面的全电流，为

$$I+I_D=\pi r^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

（2）$r>R$时，因忽略边缘效应，平行板电容的电场局限在极板内，极板面积为$S=\pi R^2$，穿过以L为边界圆平面的传导电流为零，电位移通量为$\Psi_D=SD=\pi R^2\varepsilon_0 E$，位移电流为

$$I_D=\frac{d\Psi_D}{dt}=\pi R^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

所以穿过曲面S的全电流等于穿过圆平面的全电流，为

$$I+I_D=\pi R^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

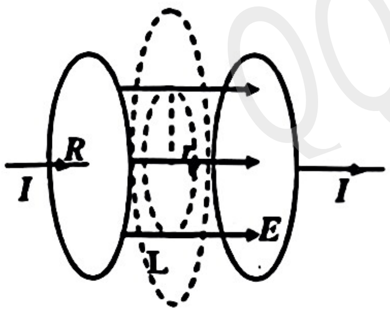
27、一个广播电台的平均辐射功率为20kW，假定辐射的能量均匀分布在以电台为球心的球面上。

求：距电台10km处电磁波的辐射强度。

【正解】$1.59\times10^{-5}\mathrm{W/m^2}$

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}=\frac{20\times10^3}{4\pi\times(10\times10^3)^2}=1.59\times10^{-5}\mathrm{W/m^2}.$$

28、平板电容器的圆形极板半径为$R=0.04\mathrm{m}$，放在真空中。今将电容器充电，使两极板间的电场变化率为$2.5\times10^{12}\mathrm{V/(m\cdot s)}$。求：(1) 两极板间位移电流的大小；(2) $r=0.02\mathrm{m}$处及$r=0.06\mathrm{m}$处的磁感强度。



【正解】(1) $0.111\mathrm{A}$；(2) $2.78\times10^{-7}\mathrm{T}$；$3.71\times10^{-7}\mathrm{T}$

(1) 电容器的极板面积为$S=\pi R^2$，穿过以L为边界的圆平面的电位移通量为

$\Psi_D=SD=\pi R^2\varepsilon_0 E$，位移电流为

$$I_D=\frac{d\Psi_D}{dt}=\pi R^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}=0.111\mathrm{A}$$

(2) 在两极板间取半径为r的磁场线为安培回路L，当$r=0.02\mathrm{m}<R$时，电位移通量为

$\Psi_D=SD=\pi r^2\varepsilon_0 E$，位移电流为$I_D=\frac{d\Psi_D}{dt}=\pi r^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$

由于磁场的对称性，H的方向在圆周回路L的切线方向，大小处处相等，根据全电流定理，得

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot2\pi r=I+I_D$$

则

$$B=\mu_0H=\frac{\mu_0}{2\pi r}I_D=\varepsilon_0\mu_0\frac{r}{2}\frac{dE}{dt}=2.78\times10^{-7}\mathrm{T}$$

当$r=0.06\mathrm{m}>R$时，因为电场局限在两极板间，求电位移通量时，只应计入极板的面积πR^2，

$\Psi_D=SD=\pi R^2\varepsilon_0 E$，位移电流为$I_D=\frac{d\Psi_D}{dt}=\pi R^2\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$

得

$$B=\mu_0H=\frac{\mu_0}{2\pi r}I_D=\varepsilon_0\mu_0\frac{R^2}{2r}\frac{dE}{dt}=3.71\times10^{-7}\mathrm{T}$$

气体分子动理论与热力学

29、容积为V的容器内混有氢气和氧气，其分子数密度分别为n_1和n_2，混合气体的温度为T．求：

（1）气体分子的平动动能总和；

（2）混合气体的压强。

【正解】(1) $(n_1+n_2)VkT$；(2) $(n_1+n_2)kT$

】(1) 气体分子的平均平动动能为$\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT$，该容器中含有的分子总数为$N=(n_1+n_2)V$

则气体分子的平动动能总和为$E_k=N\cdot\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}(n_1+n_2)VkT$.

(2) $p=p_1+p_2=n_1kT+n_2kT=(n_1+n_2)kT$.

30、在容积为$2.0\times10^{-3}\mathrm{m^3}$的容器中，有内能为$6.75\times10^{2}\mathrm{J}$的刚性双原子分子理想气体。

（1）求气体的压强；

（2）若容器中分子总数为5.4×10^{22}个，求分子的平均平动动能及气体的温度。

【正解】(1) $1.35\times10^{5}\mathrm{Pa}$；(2) $7.5\times10^{-21}\mathrm{J}$；362K

】(1) $E=\frac{i}{2}\nu RT=\frac{5}{2}pV$，$\therefore p=\frac{2E}{5V}=1.35\times10^{5}\mathrm{Pa}$.

(2) $T=\frac{p}{nk}=\frac{pV}{Nk}=362\mathrm{K}$，$\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT=7.5\times10^{-21}\mathrm{J}$.

31、速率分布函数的物理意义是什么？试说明下列各量的意义。

(1) $f(v)dv$；　(2) $Nf(v)dv$；　(3) $\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv$；

(4) $\int_{v_1}^{v_2}Nf(v)dv$；　(5) $\int_{v_1}^{v_2}vf(v)dv$；　(6) $\frac{1}{2}\int_0^{\infty}mv^2f(v)dv$

【正解】速率分布函数$f(v)$：表示一定质量的气体，在温度为T平衡态时，分布在速率v附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比。

(1) $f(v)dv$：表示分布在速率v附近，速率区间dv内的分子数占总分子数的百分比；

(2) $Nf(v)dv$：表示分布在速率v附近，速率区间dv内的分子数；

(3) $\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv$：表示分布在$v_1\sim v_2$速率区间内的分子数占总分子数的百分比；

(4) $\int_{v_1}^{v_2}Nf(v)dv$：表示分布在$v_1\sim v_2$速率区间内的分子数；

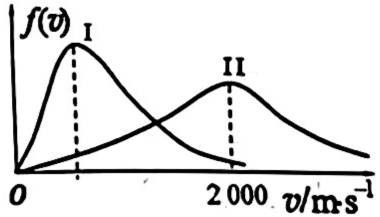
(5) $\int_{v_1}^{v_2}vf(v)dv$：表示分布在$v_1\sim v_2$速率区间内的分子速率总和；

(6) $\frac{1}{2}\int_0^{\infty}mv^2f(v)dv$：表示所有分子的平均动能。

32、图中，I和II两条曲线是两种不同气体（氢气和氧气）在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线。试由图中数据求：

（1）氢气分子和氧气分子的最概然速率；

（2）两种气体所处温度。



【正解】(1) $v_p(H_2)=2000\mathrm{m/s}$，$v_p(O_2)=500\mathrm{m/s}$；(2) 481K

】(1) 最概然速率$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$，$\because M(H_2)<M(O_2)\quad\therefore v_p(H_2)>v_p(O_2)$，曲线II为氢气的麦克斯韦速率分布曲线，$v_p(H_2)=2000\mathrm{m/s}$，$v_p(O_2)=v_p(H_2)\sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}}=500\mathrm{m/s}$.

(2) $T=\frac{v_{pH_2}^2M_{H_2}}{2R}=\frac{2000^2\times2\times10^{-3}}{2\times8.31}=481\mathrm{K}$.

33、64g氧气的温度由0℃升至50℃.

（1）保持体积不变；

（2）保持压强不变。

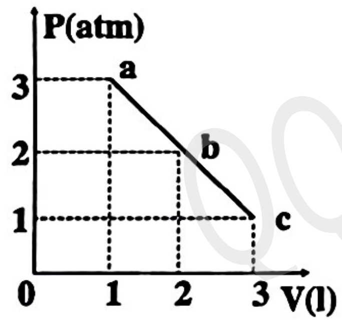
分别求在这两个过程中氧气吸收了多少热量？各增加了多少内能？对外各做了多少功？

【正解】(1) $Q_1=2077.5\text{J}$，$\Delta E_1=2077.5\text{J}$，$A_1=0$；(2) $Q_2=2908.5\text{J}$，$\Delta E_2=2077.5\text{J}$，$A_2=831\text{J}$

】(1) $A_1=0$，$Q_1=\Delta E_1=\frac{5}{2}\nu R\Delta T=\frac{5}{2}\times\frac{64}{32}\times 8.31\times 50=2077.5\text{J}$

(2) $\Delta E_2=\frac{5}{2}\nu R\Delta T=2077.5\text{J}$，$A_2=p\Delta V=\nu R\Delta T=831\text{J}$，$Q_2=\Delta E_2+A_2=2908.5\text{J}$.

34、一定量的某种理想气体，由状态a经b到达c（如图，abc为一直线）。求此过程中：(1) 气体对外作的功；(2) 气体内能的增量；(3) 气体吸收的热量。



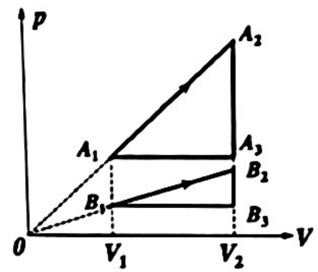
【正解】(1) 405.2J；(2) 0；(3) 405.2J

】(1) $A=\int pdV=\frac{1}{2}(1+3)\times 1.013\times 10^5\times(3-1)\times 10^{-3}=405.2\text{J}$.

(2) $\because p_aV_a=p_cV_c$ $\therefore T_a=T_c$，$\Delta E=\nu C_{V,m}(T_c-T_a)=0$.

(3) $Q=\Delta E+A=405.2\text{J}$.

35、定容摩尔热容量C_V为常量的某理想气体。经历如图所示的两个循环过程$A_1A_2A_3A_1$和$B_1B_2B_3B_1$相应的循环效率分别为η_A和η_B. 试比较η_A和η_B的大小。



【正解】$\eta_A=\eta_B$

设A_1A_2的直线方程为$p=kV$，$A_1A_2A_3A_1$循环过程中，A_1A_2过程吸热，A_2A_3、A_3A_1过程放热

A_1A_2过程：$A_1=\int pdV=\int_{V_1}^{V_2}kVdV=\frac{1}{2}k(V_2^2-V_1^2)$，

$$\Delta E_1=\nu C_V(T_2-T_1)=\frac{C_V}{R}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{C_Vk}{R}(V_2^2-V_1^2)，$$

$$Q_1=\Delta E_1+A_1=k\left(\frac{1}{2}+\frac{C_V}{R}\right)(V_2^2-V_1^2)$$

A_2A_3过程：$A_2=0$

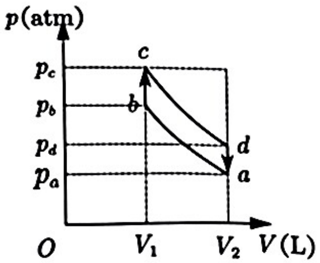
A_3A_1过程：$A_3=p_1(V_1-V_2)=kV_1(V_1-V_2)$

则循环效率为：

$$\eta_A=\frac{A_{净}}{Q_1}=\frac{A_1+A_2+A_3}{Q_1}=\frac{\frac{1}{2}k(V_2^2-V_1^2)+kV_1(V_1-V_2)}{k\left(\frac{1}{2}+\frac{C_V}{R}\right)(V_2^2-V_1^2)}=\frac{R}{R+2C_V}\cdot\frac{V_2-V_1}{V_2+V_1}$$

同理可得：$\eta_B=\frac{R}{R+2C_V}\cdot\frac{V_2-V_1}{V_2+V_1}$，$\therefore\eta_A=\eta_B$.

36、1mol氮气作如图所示的可逆循环过程，其中ab和cd是绝热过程，bc和da为等容过程，已知$V_1=16.4\text{L}$，$V_2=32.8\text{L}$，$p_a=1\text{atm}$，$p_b=3.18\text{atm}$，$p_c=4\text{atm}$，$p_d=1.26\text{atm}$，试求：（1）T_a、T_b、T_c、T_d的值；(2) E_c的值；(3) 在一循环过程中氮气所作的净功A的值。



【正解】(1) $T_a=400\text{K}$，$T_b=636\text{K}$，$T_c=800\text{K}$，$T_d=504\text{K}$；(2) $1.66\times10^4\text{J}$；(3) $1.246\times10^3\text{J}$

】(1) $T_a=\dfrac{p_aV_2}{R}=400\text{K}$；$T_b=\dfrac{p_bV_1}{R}=636\text{K}$；$T_c=\dfrac{p_cV_1}{R}=800\text{K}$；$T_d=\dfrac{p_dV_2}{R}=504\text{K}$

(2) $E_c=\dfrac{i}{2}\nu RT_c=\dfrac{5}{2}RT_c=1.66\times10^4\text{J}$

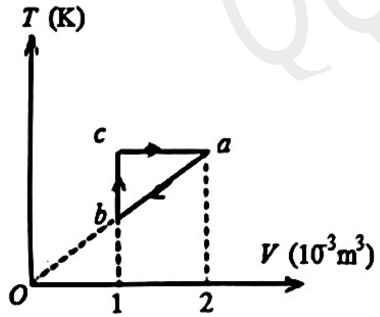
(3) bc过程：$Q_1=C_V(T_c-T_b)=3.407\times10^3\text{J}$

da过程：$Q_2=C_V(T_a-T_d)=-2.161\times10^3\text{J}$

循环过程所作净功：$A=Q_1+Q_2=1.246\times10^3\text{J}$.

37、1mol的单原子分子理想气体的循环过程如$T-V$图所示，其中c点温度为$T_c=600\text{K}$．试求：

（1）ab、bc、ca各个过程系统吸收的热量；（2）经一循环系统所作的净功；（3）循环的效率。



【正解】(1) $Q_{ab}=-6.23\times10^3\text{J}$，$Q_{bc}=3.74\times10^3\text{J}$，$Q_{ca}=3.46\times10^3\text{J}$；(2) $0.97\times10^3\text{J}$；(3) 13.5%

】(1) ca过程为等温过程，有$p_cV_c=p_aV_a\Rightarrow\dfrac{p_c}{p_a}=\dfrac{V_a}{V_c}=2$，又因$ab$过程为一直线，所以$ab$为等压过程，$\dfrac{T_c}{T_b}=\dfrac{p_c}{p_b}=\dfrac{p_c}{p_a}=2$，$\therefore T_b=300\text{K}$

各过程吸收的热量为：

ab过程：$Q_{ab}=\nu C_p(T_b-T_a)=\dfrac{5}{2}R(T_b-T_c)=-6.23\times10^3\text{J}$

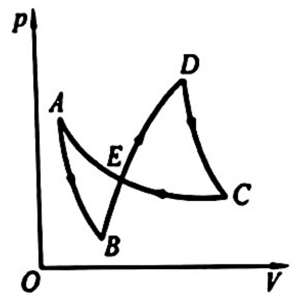
bc过程：$Q_{bc}=\Delta E_{bc}=\nu C_V(T_c-T_b)=\dfrac{3}{2}R(T_c-T_b)=3.74\times10^3\text{J}$

ca过程：$Q_{ca}=A_{ca}=\nu RT_c\ln\dfrac{V_a}{V_c}=RT_c\ln2=3.46\times10^3\text{J}$.

(2) $A=Q=Q_{ab}+Q_{bc}+Q_{ca}=0.97\times10^3\text{J}$

(3) $\eta=1-\dfrac{|Q_{ab}|}{Q_{bc}+Q_{ca}}=13.5\%$.

38、如图所示，AB、DC是绝热过程，CEA是等温过程，BED是任意过程，组成一个循环。若图中$EDCE$所包围的面积为70J，$EABE$所包围的面积为30J，过程中系统放热100J．求BED过程中系统吸热为多少。



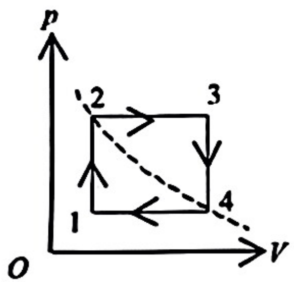
【正解】140J

】正循环$EDCE$所包围的面积为70J，表示系统对外作正功70J；逆循环$EABE$所包围的面积为30J，表示系统对外作负功30J．所以整个循环过程系统对外作功：$A=70-30=40\text{J}$

设CEA过程吸热Q_1，BED过程吸热Q_2，由于CEA过程放热，即$Q_1=-100\text{J}$

则有$Q_2=A-Q_1=140\text{J}$.

39、1mol的理想气体，完成了由两个等体过程和两个等压过程构成的循环过程，如图所示，已知状态1的温度为T_1，状态3的温度为T_3，且状态2和4在同一条等温线上。求：气体在这一循环过程中作的功。



【正解】$R\left(T_3+T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)$

设状态2和4的温度为T

循环过程中作的功为

$$A=A_{23}+A_{14}=p_2(V_3-V_2)+p_1(V_1-V_4)=R(T_3-T)+R(T_1-T)=R(T_3+T_1-2T)$$

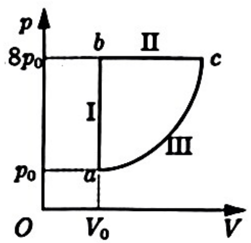
$$T_1T_3=\frac{p_1V_1}{R}\frac{p_3V_3}{R}=\frac{p_4V_2p_2V_4}{R^2}=T_2T_4=T^2,\ \therefore T=\sqrt{T_1T_3}$$

$$\therefore A=R\left(T_3+T_1-2\sqrt{T_1T_3}\right)$$

40、1mol单原子分子的理想气体，经历如图所示的可逆循环，联结ac两点的曲线 III 的方程为$p=\frac{p_0V^3}{V_0^3}$，a点的温度为T_0.

（1）试以T_0和普适气体常量R表示I、II、III过程中气体吸收的热量；

（2）求此循环的效率。



【正解】（1）$Q_{\mathrm{I}}=\frac{21}{2}RT_0$，$Q_{\mathrm{II}}=20RT_0$，$Q_{\mathrm{III}}=-\frac{105}{4}RT_0$；（2）13.9%

（1）$T_b=T_a\frac{8p_0}{p_0}=8T_0$，$p_c=8p_0=\frac{p_0V_c^3}{V_0^3}\Rightarrow V_c=2V_0$，$T_c=T_b\frac{V_c}{V_b}=2T_b=16T_0$

过程I：$Q_{\mathrm{I}}=\nu C_{V,m}(T_b-T_a)=\frac{3}{2}R(T_b-T_a)=\frac{21}{2}RT_0$

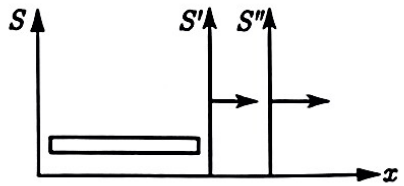
过程II：$Q_{\mathrm{II}}=\nu C_{p,m}(T_c-T_b)=\frac{5}{2}R(T_c-T_b)=20RT_0$

过程III：$Q_{\mathrm{III}}=\Delta E+A=\nu C_{V,m}(T_a-T_c)+\int_{2V_0}^{V_0}\frac{p_0V^3}{V_0^3}dV=-\frac{45}{2}RT_0-\frac{15}{4}p_0V_0=-\frac{105}{4}RT_0$.

（2）$\eta=1-\frac{|Q_{\mathrm{III}}|}{Q_{\mathrm{I}}+Q_{\mathrm{II}}}=13.9\%$.

狭义相对论动力学基础

41、如图所示，米尺沿x方向放置，且相对于S系静止。另有两参考系S'和S''沿x轴正向运动，在S'和S''系测得米尺的长度分别为0.6m和0.8m。求S'相对于S''系的运动速度。



【正解】$0.2c$，沿x轴正向

S系中：$l=1\text{m}$，

S'系中：$l'=l\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=0.6\text{m}$，$\therefore v_1=0.8c$

S''系中：$l''=l\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}=0.8\text{m}$，$\therefore v_2=0.6c$

则S'相对于S''系的运动速度为：$v_1-v_2=0.2c$，沿x轴正向。

42、设K'系相对惯性系K以速率u沿x轴正方向，K'系和K系的相对应坐标轴平行。如果从K'系中沿y'轴正向发出一光信号，求在K系中观察到该光信号的传播速率和传播方向。

【正解】c，方向与x轴正方向夹角为$\arctan\frac{c}{u}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

】由光速不变原理知，K系中观察到该光信号的传播速率为c

光信号在K'系中的速度为：$u_x'=0$，$u_y'=c$

则在K系中：$u_x=\dfrac{u_x'+u}{1+\frac{u}{c^2}u_x'}=u$，$u_y=\dfrac{u_y'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c^2}u_x'}=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$\tan\theta=\dfrac{u_y}{u_x}=\dfrac{c}{u}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，即传播方向与$x$轴正方向成$\arctan\frac{c}{u}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$角。

43、假设地球上有一观察者测得一宇宙飞船以$0.6c$的速度向东飞行，5.0s后该飞船将与一个以$0.8c$的速率向西飞行的彗星相碰撞。试求：

（1）飞船中的人测得彗星将以多大的速率向它运动；

（2）从飞船的钟来看，还有多少时间容许它离开航线，以避免与彗星碰撞？

【正解】（1）$0.946c$；（2）4.0s

】（1）取地球为S系，飞船为S'系，向东为x轴正向，则S'系相对S系的速度$v=0.6c$，彗星相对S系的速度$u_x=-0.8c$

由速度变换公式可得所求结果，$u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=-0.946c$

即彗星以$0.946c$的速率向飞船靠近

（2）由时间间隔的相对性有$\Delta t=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=5.0\text{s}$，$\therefore t'=4.0\text{s}$.

44、观察者甲和乙分别静止于两个惯性系K和K'（K'系相对于K系作平行于x轴的匀速运动）中，甲测得在x轴上两点发生的两个时间的空间间隔和时间间隔分别为500m和2×10^{-7}s，而乙测得这两个事件是同时发生的。求：K'系相对于K系以多大速度运动？

【正解】3.6×10^{7}m/s

】设K'系相对于K系的运动速度为v，由洛伦兹变换可得：

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad t_2'=\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

乙测得这两个事件同时发生，则$t_1'=t_2'$

$$\therefore t_2-t_1=\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$$

$$\therefore v=\frac{(t_2-t_1)c^2}{x_2-x_1}=\frac{2\times10^{-7}\times(3\times10^{8})^2}{500}=3.6\times10^{7}\text{m/s}$$

45、在实验室中测得电子的速度是$0.8c$，c为真空中的光速。假设一观察者相对实验室以$0.6c$的速率运动，其方向与电子运动方向相同，试求该观察者测出的电子的动能和动量是多少？（电子静止质量$m_e=9.11\times10^{-31}$kg）

【正解】6.85×10^{-15}J；1.14×10^{-22}kg·m/s

】设实验室为K系，观察者在K'系中，电子为运动物体，则K'系相对于K系的速度$u=0.6c$，电子对K系的速度为$u_x=0.8c$，电子对K'系的速度为$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{v}{c^2}v_x}=0.385c$，则

$$E_k=\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_x'}{c}\right)^2}}-m_ec^2=6.85\times10^{-15}\text{J}$$

$$p=\frac{m_ev_x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_x'}{c}\right)^2}}=1.14\times10^{-22}\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

46、两个质点A和B，静止质量均为m_0．质点A静止，质点B的动能为$6m_0c^2$．设A、B两质点相撞并结合成为一个复合质点。求：复合质点的静止质量。

【正解】$4m_0$

设复合质点静止质量为M_0，总质量为M．由能量守恒定律可得：

$$Mc^2=m_0c^2+mc^2$$

其中mc^2为相撞前质点B的总能量：

$$mc^2=m_0c^2+6m_0c^2=7m_0c^2$$

$$\therefore M=8m_0$$

设质点B的动量为p_B，复合质点的动量为p．由动量守恒定律：$p=p_B$

利用动量与能量关系，对于质点B可得：

$$p_B^2c^2+m_0^2c^4=m^2c^4=49m_0^2c^4$$

对于复合质点可得：

$$p^2c^2+M_0^2c^4=M^2c^4=64m_0^2c^4$$

$$M_0^2=64m_0^2-48m_0^2=16m_0^2$$

$$\therefore M_0=4m_0$$

47、由于相对论效应，如果粒子的能量增加，粒子在磁场中的回旋周期将随能量的增加而增大，计算动能为10^4MeV的质子在磁感强度为1T的磁场中的回旋周期（质子的静止质量为

1.67×10^{-27}kg，$1\text{eV}=1.6\times10^{-19}$J）

【正解】7.64×10^{-7}s

$$E_k=mc^2-m_0c^2，m=m_0+\frac{E_k}{c^2}，T=\frac{2\pi m}{qB}=2\pi\frac{m_0+\frac{E_k}{c^2}}{qB}=7.64\times10^{-7}\text{s}.$$

48、设快速运动的介子的动能约为$E=3000$MeV，而这种介子在静止时的能量为$E_0=100$MeV．若这种介子的固有寿命是2×10^{-6}s，求：它运动的最大距离。

【正解】1.799×10^4m

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}，可得\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{E}{E_0}=30，可求得v=2.998\times10^8\text{m/s}$$

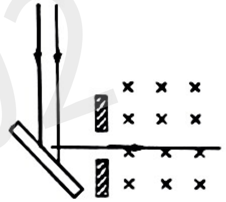
$$t=\frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=6\times10^{-5}\text{s}，则运动的最大距离为l=vt=1.799\times10^4\text{m}.$$

量子力学基础

49、波长为λ的单色光照射某金属表面发生光电效应，发射的光电子（电量绝对值为e，质量为m）经狭缝后垂直进入磁感应强度为B的均匀磁场，如图所示，今已测出电子在该磁场中作圆周运动的最大半径为R．求：

（1）金属材料的逸出功；

（2）遏止电势差。



【正解】（1）$h\frac{c}{\lambda}-\frac{(eBR)^2}{2m}$；（2）$\frac{eB^2R^2}{2m}$

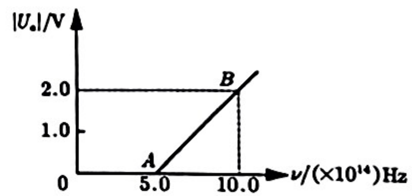
】（1）设光电子获得的速度为v，则有$evB=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow v=\frac{eBR}{m}$

设金属材料的逸出功为A，根据光电效应方程，有

$$A=h\nu-\frac{1}{2}mv^2=h\frac{c}{\lambda}-\frac{(eBR)^2}{2m}$$

（2）$eU=\frac{1}{2}mv^2=\frac{(eBR)^2}{2m}$，$U=\frac{eB^2R^2}{2m}$.

50、如图所示为在一次光电效应实验中得出曲线。



（1）求证：对不同材料的金属，AB线的斜率相同；

（2）由图上数据求出普朗克恒量h.

【正解】（1）见解析；（2）6.4×10^{-34}J·s

（1）证明：由光电效应方程：$e|U_a| = h\nu - A$，即$|U_a| = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}$，所以$AB$线的斜率$\frac{h}{e}$与材料无关。

（2）由图可知AB线的斜率为$k = \frac{2.0}{(10.0-5.0)\times10^{14}} = 4\times10^{-15}$，$\therefore h = ke = 6.4\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$.

51、已知X射线光子的能量为0.6MeV，若在康普顿散射中，散射光子的波长变化了20%，试求：反冲电子的动能是多少？

【正解】0.1MeV

由题意$\Delta\lambda = 0.2\lambda_0$，$h\nu_0 = 0.6\mathrm{MeV}$，则有$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0+\Delta\lambda} = \frac{c}{1.2\lambda_0} = \frac{\nu_0}{1.2}$

反冲电子的动能：$E_k = h\nu_0 - h\nu = h\nu_0\left(1-\frac{1}{1.2}\right) = 0.1\mathrm{MeV}$.

52、假定在康普顿散射实验中，入射光的波长$\lambda_0 = 0.0030\mathrm{nm}$，反冲电子的速率$v = 0.6c$．求：散射光的波长$\lambda$.

【正解】$4.34\times10^{-12}\mathrm{m}$

$E_k = h\nu_0 - h\nu = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right) = 0.25m_0c^2$

即$h\frac{c}{\lambda_0} - h\frac{c}{\lambda} = 0.25m_0c^2$，$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{0.25m_0c^2}{hc}\right)^{-1} = 4.34\times10^{-12}\mathrm{m}$.

53、如果试室温下（$t=27℃$）中子的动能与同温度下理想气体分子的平均平动动能相同，则中子的动能为多少？其德布罗意波长是多少？

【正解】$6.21\times10^{-21}\mathrm{J}$；$1.46\times10^{-10}\mathrm{m}$

$E_k = \overline{\varepsilon_k} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300 = 6.21\times10^{-21}\mathrm{J}$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 1.46\times10^{-10}\mathrm{m}$.

54、能量为15eV的光子，被处于基态的氢原子吸收，使氢原子电离发射一个光电子。求：此光电子的德布罗意波长。

【正解】$1.04\times10^{-9}\mathrm{m}$

远离核的光电子动能为：$E_k = \frac{1}{2}m_ev^2 = 15-13.6 = 1.4\mathrm{eV}$

光电子的德布罗意波长为：$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_k}} = 1.04\times10^{-9}\mathrm{m}$

55、根据玻尔理论：

（1）计算氢原子中电子在量子数为n的轨道上作圆周运动的频率；

（2）计算当该电子跃迁到$(n-1)$的轨道上时所发出的光子的频率；

（3）证明当n很大时，上述（1）和（2）结果近似相等。

【正解】（1）$\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{1}{n^3}$；（2）$\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$；（3）见解析

（1）$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r^2} = m\frac{v^2}{r}$，$mvr = n\frac{h}{2\pi}$，$\omega_n = \frac{v}{r}$，联立上式解出：$\omega_n = \frac{\pi me^4}{2\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{1}{n^3}$

$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{me^4}{4\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{1}{n^3}$.

（2）电子从n态跃迁到$(n-1)$态所发出的光子的频率为：

$$\nu' = \frac{c}{\lambda} = cR\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

（3）当n很大时，上式变为：

$$\nu' = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{2-(1/n)}{n(n-1)^2} \approx \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{2}{n^3} = \nu_n$$

56、假设电子绕氢核旋转的玻尔轨道的圆周长刚好为电子物质波波长的整数倍，试从此点出发解出玻尔的动量矩量子化条件。

【正解】$L=\frac{nh}{2\pi}$

由题意，若圆周半径为r，则有$2\pi r=n\lambda$，其中n为整数，λ为电子物质波波长。根据德布罗意公式$\lambda=\frac{h}{mv}$，得：$2\pi r=\frac{nh}{mv}$，于是$2\pi rmv=nh$

这里m为电子质量，v为电子速度的小，rmv为动量矩，以L表示，则上式为：

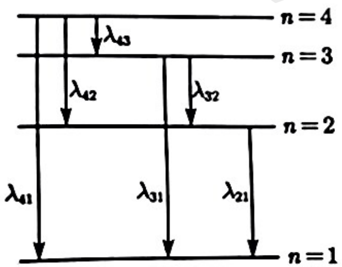
$$L=\frac{nh}{2\pi}$$

这就是玻尔的动量矩量子化条件。

57、实验发现基态氢原子可吸收能量为12.75eV的光子。

（1）试问氢原子吸收该光子后将被激发到哪个能级？

（2）受激发的氢原子向低能级跃迁时，可能发出哪几条谱线？请画出能级图（定性），并将这些跃迁画在能级图上。



【正解】（1）$n=4$；（2）见解析

【 】（1）$\Delta E=E_1\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-13.6\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=12.75\text{eV}$，$\therefore n=4$.

（2）可以发出λ_{41}、λ_{42}、λ_{43}、λ_{31}、λ_{32}、λ_{21}六条谱线，如右图所示。

58、在氢原子中，电子从某能级跃迁到量子数为n的能级，这时轨道半径改变q倍，求发射的光子的频率。

【正解】$\frac{Rc}{n^2}\left(1-\frac{1}{q}\right)$

【 】设初始能级量子数为k，则轨道半径由r_k变为r_n，且$r_k=qr_n$

由$r_k=k^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}$，可得：$k^2=qn^2$

光子的频率：$\nu=Rc\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)$，即$\nu=\frac{Rc}{n^2}\left(1-\frac{n^2}{k^2}\right)=\frac{Rc}{n^2}\left(1-\frac{1}{q}\right)$.

59、能量为15eV的光子，被处于基态的氢原子吸收，使氢原子电离发射一个光电子，求此光电子的德布罗意波长（普朗克常量$h=6.63\times10^{-34}\text{J·s}$，基本电荷$e=1.6\times10^{-19}\text{C}$，电子质量$m_e=9.11\times10^{-31}\text{kg}$）。

【正解】$1.04\times10^{-9}\text{m}$

【 】远离核的光电子动能为：$E_k=\frac{1}{2}m_e v^2=15-13.6=1.4\text{eV}$

德布罗意波长为：$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}}=1.04\times10^{-9}\text{m}$.

60、氢原子激发态的平均寿命约为10^{-8}s，假设氢原子处于激发态时，电子作圆轨道运动，试求出处于量子数$n=5$状态的电子在它跃迁到基态之前绕核转了多少圈（普朗克常量$h=6.63\times10^{-34}\text{J·s}$，基本电荷$e=1.6\times10^{-19}\text{C}$，电子质量$m_e=9.11\times10^{-31}\text{kg}$，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$）

【正解】5.23×10^{5}

【解析】电子作一次圆周运动所需时间为：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

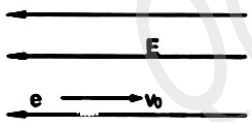
令激发态的平均寿命为$t=10^{-8}$s，故电子在t内从激发态跃迁到基态前绕核的圈数为$N=\dfrac{t}{T}$

电子作圆周运动的周期T可由下面二式求出：$\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\dfrac{v^2}{r}$，$m\omega r^2=n\dfrac{h}{2\pi}$，可得：

$$\omega=\frac{\pi me^4}{2\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{1}{n^3}$$

联立解得：$N=\dfrac{t}{T}=\dfrac{tme^4}{4\varepsilon_0^2h^3}\cdot\dfrac{1}{n^3}=5.23\times10^{5}$.

61、如图所示，一电子以初速度$v_0=6\times10^6$m/s逆着场强方向飞入电场强度为$E=500$V/m的均匀电场中，问该电子在电场中要飞行多长距离d，可使得电子的德布罗意波长达到$\lambda=0.1$nm（飞行过程中，电子的质量认为不变，即静止质量$m_e=9.11\times10^{-31}$kg，普朗克常量$h=6.63\times10^{-34}$J·s，基本电荷$e=1.6\times10^{-19}$C）



【正解】9.68×10^{-2}m

【解析】由$\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{m_ev}$，得电子的末速度：$v=\dfrac{h}{m_e\lambda}=\dfrac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times10^{-10}}=7.28\times10^{6}$m/s

电子的加速度：$a=\dfrac{eE}{m_e}=\dfrac{1.6\times10^{-19}\times500}{9.11\times10^{-31}}=8.78\times10^{13}$m/s^2

由运动学公式$v^2-v_0^2=2ad$，得：

$$d=\frac{v^2-v_0^2}{2a}=\frac{(7.28\times10^6)^2-(6\times10^6)^2}{2\times8.78\times10^{13}}=9.68\times10^{-2}\text{m}$$

62、质量为m的粒子在外力场中作一维运动，外力场的势能分布为：在$0<x<a$区域$U=0$；在$x\leqslant0$和$x\geqslant a$区域$U=\infty$，即粒子只能在$0<x<a$区域内自由运动。求：粒子的能量和归一化的波函数。

【正解】$E_n=\dfrac{n^2h^2}{8ma^2}$　　$n=1,2,3,\cdots$；$\Psi=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & 0<x<a\\ 0 & x\leqslant0,\ x\geqslant a\end{cases}$

【解析】设粒子能量为E，根据一维定态薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2}=E\Psi$$

令$k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$，则上式可改写为：　$\dfrac{d^2\Psi}{dx^2}+k^2\Psi=0$

方程的解为：　$\Psi=A\cos kx+B\sin kx$

由题意：$x\leqslant0$和$x\geqslant a$时，$\Psi=0$，可得：$A=0$，$B\sin ka=0$，因此$\sin ka=0$必成立，则$k=\dfrac{n\pi}{a}$

$$\Psi=B\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\quad n=1,2,3,\cdots$$

粒子能量：　$E_n=\dfrac{n^2h^2}{8ma^2}$　　$n=1,2,3,\cdots$

根据归一化条件：$\displaystyle\int_0^\infty|\Psi|^2dx=1$，可得：

$$\int_0^\infty B^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=1$$

$$B=\sqrt{\frac{2}{a}}$$

所以粒子的归一化波函数为：$\Psi=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & 0<x<a\\ 0 & x\leqslant0,\ x\geqslant a\end{cases}$

63、原子内电子的量子态由n,l,m_l及m_s四个量子数表征。当n,l,m_l一定时，不同的量子态数目是多少？当n,l一定时，不同的量子态数目是多少？当n一定时，不同的量子态数目是多少？

【正解】（1）2；（2）$2(2l+1)$；（3）$2n^2$

】（1）当n,l,m_l一定时，$m_s=\pm\frac{1}{2}$，不同量子态数目为2.

（2）当n,l一定时，$m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$，$m_s=\pm\frac{1}{2}$，不同量子态数目为$2(2l+1)$；

（3）当n一定时，$l=0,1,2,\cdots,(n-1)$，不同量子态数目为$\sum_{l=0}^{n}2(2l+1)=2n^2$.

64、根据量子力学理论，氢原子中电子的动量矩在外磁场方向上的投影为$L_z=m_l\hbar$，当角量子数$l=2$时，L_z的可能取值为多少？

【正解】$0,\pm\hbar,\pm2\hbar$

【学解】$l=2$时，磁量子数可取的值为$m_l=0,\pm1,\pm2$，则$L_z=m_l\hbar=0,\pm\hbar,\pm2\hbar$.