大一下期中考题

【微积分】（2010-2019 年）

【概率论】（2015-2019 年）

【大　物】（2015-2019 年）

姓名：________ 学号：________ 班级：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2018-2019 年 第二 学期）

课程编号： 201411002 课程名称： 微积分 A(二)(期中)

题号	一	二	三	四	总分
分数					
评卷人					

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

说明：请将以下单项选择题的答案按题号填入下表中.

1.	2.	3.	4.	5.

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处_____.

(A) 连续，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在　　(D) 不连续，偏导数不存在

2. 设 $f(x,y)$ 在(0,0)的某个邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则下列结论正确的是_____.

(A) $dz\big|_{(0,0)}=3dx+dy$

(B) 曲线 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$

3. 设函数 $z=f(x,y)$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$ 且 $f(x,0)=1, f_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)$ 为_____.

(A) $1-x^2y+y^2$　　(B) $1+x^2y+y^2$　　(C) $1+xy+y^2$　　(D) $1-xy+y^2$

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$_____.

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0

5. 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于_____.

(A) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$　　(B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$

(C) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$　　(D) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\,dr$

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

说明：请将以下填空题的答案按题号填入下表中.

1.	6.
2.	7.
3.	8.
4.	9.
5.	10.

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ A, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，要使 $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续，则 $A=$_____.

2. 设函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$_____.

3. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数的全微分，则

$a+b=$______.

4. 曲面 $xe^y+y^2e^{2z}+z^3e^{3x}=\frac{2}{e}+1$ 在点 $(2,-1,0)$ 处的法线方程为________________.

5. 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程是______________.

6. 函数 $u=xy^2+yz^2+zx^2$ 在点 $A(1,1,1)$ 处方向导数的最大值为___________.

7. 设 $D:0\le y\le\sqrt{a^2-x^2},0\le x\le a$，则 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______________.

8. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标面围成的空间区域，则 $\iiint\limits_\Omega(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$__________.

9. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z\le\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{3}z,\ 0\le z\le 4\}$，则 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}V=$__________.

10. 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\int_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$______.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xye^x}{4-\sqrt{16+xy}}$.

2. 设 $z=f(x,y)$ 在 (a,a) 点可微，$\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$，$f(a,a)=a$，$f_x(a,a)=f_y(a,a)=b$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}\varphi^2(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a}$.

3. 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

装

订

线

班级：________　　学号：________　　姓名：________

装　订　线

4. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$，起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分 $\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

5. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

四、应用题（共 15 分）

1. （8 分）已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

2. （7 分）设由曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围的物体，其上各点的密度与该点到原点的距离成正比，求该物体重心.

装 订 线

微积分 A（二）期中考试答案及评分标准
（2019 年 4 月）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C;　　2. C;　　3. C;　　4. B;　　5. D.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 1;

2. $-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$;

3. 0;

4. $x-2=\dfrac{y+1}{2-2e}=\dfrac{z}{2e}$ 或 $\dfrac{x-2}{e^{-1}}=\dfrac{y+1}{2e^{-1}-2}=\dfrac{z}{2}$;

5. $2x-y-z=1$ 或 $2(x-1)-y-(z-1)=0$;

6. $3\sqrt{3}$;

7. $\dfrac{\pi}{6}a^3$;

8. $\dfrac{1}{4}$;

9. 128π;

10. $12a$.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解答：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xye^x}{4-\sqrt{16+xy}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xye^x(4+\sqrt{16+xy})}{-xy}$ ……………………4 分

$=-8$. ……………………4 分

2. 解答：$\dfrac{d\varphi^2(x)}{dx}=2\varphi(x)\varphi'(x)$ ……………………2 分

$\varphi'(x)=f_1'(x,f(x,f(x,x)))+f_2'(x,f(x,f(x,x)))\dfrac{d}{dx}[f(x,f(x,x))]$

$=f_1'(x,f(x,f(x,x)))+f_2'(x,f(x,f(x,x)))$

$\cdot[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f'(x,x)_2)]$ ……………………2 分

$\varphi'(a)=f_1'(a,a)+f_2'(a,a)\cdot[f_1'(a,a)+f_2'(a,a)(f_1'(a,a)+f_2'(a,a))]$

$=b+b[b+b(b+b)]=b+b^2+2b^3$ ……………………2 分

$\varphi(a)=f(a,f(a,f(a,a)))=f(a,a)=a$ ……………………1 分

$\left.\dfrac{d\varphi^2(x)}{dx}\right|_{x=a}=2\varphi(a)\varphi'(a)=2a(b+b^2+2b^3)=2ab(1+b+2b^2)$. ……………………1 分

3. 解答：由多元复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$ ……………………2 分

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial z}{\partial u})+\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial z}{\partial v})=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial u})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial v})=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$=-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial u})+a\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial v})$

$=-2(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y})+a(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y})$

$=4\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. ……………………3 分

代入 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，并整理得

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

于是，令 $6+a-a^2=0$ 得 $a=3$ 或 $a=-2$．$a=-2$ 时，$10+5a=0$，故舍去；$a=3$ 时，$10+5a\neq 0$，因此仅当 $a=3$ 时化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. ……………………3 分

4. 解答：曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=\cos t \end{cases}$，起点 $A(0,\sqrt{2},0)$ 对应 $t=\frac{\pi}{2}$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$ 对应 $t=-\frac{\pi}{2}$. ....3 分

$$\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\sin t+\cos t)\mathrm{d}(\cos t)+(\sqrt{2}\sin t)\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin t)+(2-\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t \quad \text{............3 分}$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \quad \text{............2 分}$$

5. 解答：设圆 $x^2+y^2=2x$ 为圆 C_1，圆 $x^2+y^2=4$ 为圆 C_2，所补直线 L_1 为 $x=0(0\le y\le 2)$，则 ....2 分

$$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L+L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y \quad \text{............2 分}$$

$$=\iint_D(3x^2+1-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_2^0-2y\mathrm{d}y \quad \text{............2 分}$$

$$=\frac{1}{4}S_{C_2}-\frac{1}{2}S_{C_1}+4=\frac{\pi}{2}-4. \quad \text{............2 分}$$

四、应用题（15 分）

1. 解答：点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面的最远点和最近点的坐标，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点. ....2 分

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$，所以

$$\begin{cases} L'_x=2\lambda x+\mu=0 & (1) \\ L'_y=2\lambda y+\mu=0 & (2) \\ L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0 & (3) \\ x^2+y^2-2z^2=0 & (4) \\ x+y+3z=5 & (5) \end{cases}$$

由(1)(2)得 $x=y$，代入(4)(5)有 $\begin{cases} x^2-z^2=0 \\ 2x+3z=5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$. ....4 分

根据问题的实际意义，曲线 C 上距离 xOy 面的最远点的坐标为 $(-5,-5,5)$ 和最近点的坐标为 $(1,1,1)$. ....2 分

2. 解答：设比例系数为 k，由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$. ....2 分

$$\bar{z}=\frac{\iiint_\Omega kz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\sin\varphi\mathrm{d}r}=\frac{8}{7}$$

所以重心为 $(0,0,\frac{8}{7})$. ....5 分

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2015-2016 年 第二 学期）

2016 年 4 月

课程编号： 201411002 课程名称： 微积分 A (二) （期中）

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

得分	评卷人

一、填空题（每小题3分，共30分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(1-\cos(x^2+y^2))\sin xy}{(x^2+y^2)^2 e^{x^2+y^2}}=$__________.

2. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为__________.

3. 螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切向量为__________.

4. 若函数 $u=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$，则 $du|_{(1,1,1)}=$__________.

5. 设 $u=\int_{xz}^{yz}e^{t^2}dt$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=$__________.

6. $I=\int_0^2 dx\int_x^{2x}f(x,y)dy$，交换积分次序后，$I=$__________.

7. 设平面曲线 L 为：$y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)ds=$_______.

8. 设曲面 $\sum$ 为 $x^2+y^2=9$ 介于 $z=0$ 及 $z=3$ 间的部分的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+1)dS=$__________.

9. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 偏导数存在，且在点 $(1,2)$ 处有极值，则 $f_y(1,2)=$______.

10. 设 α,β 为平面上有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角，则两类曲线积分之间有如下联系：$\int_L Pdx+Qdy=$__________.

得分	评卷人

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. 设 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 都存在，则______.

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续　(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 存在　(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y_0)$ 存在

2. 设 D 是第二象限的一个有界闭区域，且 $0<y<1$．记 $I_1=\iint\limits_D yx^3d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D y^2x^3d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D y^{\frac{1}{2}}x^3d\sigma$．$I_1,I_2,I_3$ 的大小顺序是______.

(A) $I_1\le I_2\le I_3$　(B) $I_2\le I_1\le I_3$　(C) $I_3\le I_1\le I_2$　(D) $I_3\le I_2\le I_1$

3. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积为______.

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{2}\pi$　(C) π　(D) $\frac{\pi}{2}$

4. 设 $f_x'(a,b)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x+a,b)-f(a-x,b)}{x}=$______.

(A) $f_x'(a,b)$　(B) 0　(C) $2f_x'(a,b)$　(D) $\frac{1}{2}f_x'(a,b)$

5. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线 L，在点 (x,y) 处的线密度为 $\rho(x,y)$，则曲线弧 L 的重心的 x 坐标 $\bar{x}$ 为______.

(A) $\bar{x}=\dfrac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)ds$　(B) $\bar{x}=\dfrac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)dx$

(C) $\bar{x}=\int_L x\rho(x,y)ds$

(D) $\bar{x}=\dfrac{1}{M}\int_L xds$，其中 M 为曲线弧 L 的质量

三、

得分	评卷人

计算题（每小题8分，共32分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(xz,z-y)$ 所确定，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$．

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$，式中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域.

3. 计算 $\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 为曲线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$，从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段.

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}3z\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 平面上的部分.

装

订

线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

四、

得分	评卷人

应用题（每小题8分，共16分）

1. 求内接于半径为$\sqrt{3}$的球，且有最大体积的长方体.

2. 在过点$O(0,0)$与$A(\pi,0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中，求一条曲线L，使沿该曲线从O到A得积分$\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy$的值最小.

五、

得分	评卷人

证明题（7分）

若函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，试证明$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，并求此点的全微分.

007打印社精心整理 QQ：1731912014

装

订

线

微积分 A（二）期中考试答案及评分标准
（2016 年 4 月）

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 0;

2. $\frac{1}{2}$;

3. $\{0,a,b\}$;

4. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$;

5. $ye^{y^2z^2}-xe^{x^2z^2}$;

6. $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$;

7. π;

8. 180π;

9. 0;

10. $\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C;　　2. C;　　3. B;　　4. C;　　5. A.

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 解答：方程 $z=f(xz,z-y)$ 两端分别对 x,y 求偏导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+f_2\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1x\frac{\partial z}{\partial y}+f_2(\frac{\partial z}{\partial y}-1),$$ ....4 分

当 $1-xf_1'-f_2'\neq 0$ 时，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zf_1'}{1-xf_1'-f_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f_2'}{1-xf_1'-f_2'}$，所以

$$\mathrm{d}z=\frac{zf_1'\mathrm{d}x-f_2'\mathrm{d}y}{1-xf_1'-f_2'}.$$ ....4 分

2. 解答：易知 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V=0$，则 ....2 分

原式 $=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$ ....4 分

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$. ....2 分

3. 解答：原式 $=\int_0^{2\pi}[a\sin t(-a\sin t)+bt(a\cos t)+(a\cos t)b]\mathrm{d}t$ ....4 分

$=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t)\mathrm{d}t=-\pi a^2$. ....4 分

4. 解答：D_{xy}：$x^2+y^2\le 2$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ......2 分

原式 $=\iint\limits_{D_{xy}} 3[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ....1 分

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r=\frac{111}{16}\pi$. ....5 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 解答：设 $F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$，令

$$\begin{cases}F_x=8yz+2x\lambda=0\\F_y=8xz+2y\lambda=0\\F_z=8xy+2z\lambda=0\\x^2+y^2+z^2-3=0\end{cases}$$ ....4 分

得唯一合理驻点 $(1,1,1)$，故所求为各边均为 2 的正方体体积最大.

2. 解答：$I(a)=\int_0^{\pi}[(1+a^3\sin^3 x)+(2x+a\sin x)a\cos x]\mathrm{d}x=\pi+\frac{4a^3}{3}-4a$ ......4 分

$I'(a)=4a^2-4=0$ 得 $a=1$，$I''(a)\big|_{a=1}=8a\big|_{a=1}=8>0$，故在 $a=1$ 取最小值，相应的曲线为 $y=\sin x$. ....4 分

五、证明题（7 分）

证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow f(0,0)=0$ ....1 分

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=0}}\frac{f(x,0)-x}{|x|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=0}}\frac{f(x,0)-x}{x}\frac{x}{|x|}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=0}}\frac{f(x,0)-x}{x}=0\Rightarrow f_x'(0,0)=1$. ....2 分

同理 $f_y'(0,0)=0$. ....1 分

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-(f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow$ 可微. ....3 分

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

2015-05

课程编号：201411002 课程名称：微积分 A(二)（期中）

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

得分	评卷人

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\ln(1+xy)}{y^2(e^x-1)}$ 的值为________.

2. 已知方程 $x+y-z=e^z$ 确定了二元函数 $z=z(x,y)$，则此函数的全微分 $dz=$________。

3. 函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在点 $A(1,2)$ 处沿点 A 到点 $B(2,2+\sqrt{3})$ 的方向导数为________.

4. 半径为 R 的均匀半圆薄片（面密度为常量 μ）对于其直径边的转动惯量为________。

5. 曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}s$ 的值为________，其中 $L: y=\dfrac{1}{2}x^2,\ 0\le x\le\sqrt{3}$..

得分	评卷人

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

说明：请将以下单项选择题的答案按题号填入下表中.

1	2	3	4	5

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处________.

(A) 不连续 (B) 偏导数不存在

(C) 偏导数连续 (D) 不可微

2. 设有隐函数方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程________。

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$ 和 $x=x(y,z)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

3. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

(A) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$ (B) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ (D) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$

4. 设二元函数 $f(x,y)=x^3+2y^2-3x+4$，由 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ 解得驻点 $M_1(1,0)$ 及 $M_2(-1,0)$，则______。

(A) $f(M_1)$ 是极小值 (B) $f(M_1)$ 是极大值

(C) $f(M_2)$ 是极小值 (D) $f(M_2)$ 是极大值

5. 已知 Ω 由 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+2y+z=1$ 所围成，则 $\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=$________。

A. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{1-x-2y}xdz$ B. $\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_0^{1-x-2y}xdz$

C. $\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_0^1 xdz$ D. $\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_0^{1-x-2y}xdz$

得分	评卷人

三、计算题（每小题10分，共50分）

1. 设函数$u = f(\frac{1}{x},\frac{1}{xy})$，其中$f$具有二阶连续的偏导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 设$z = z(x,y)$是由方程$x^2 + y^2 - z = \varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中$\varphi$具有二阶导数，且$\varphi' \neq 0$，（1）求$dz$；（2）记$u(x,y) = \frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y})$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

3. 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$，其中$D$: $x \le x^2 + y^2 \le 2x$.

4. 设立体Ω由曲面$z = x^2 + y^2$和$z = 1$围成，其上任一点(x,y,z)处的体密度$\rho(x,y,z) = x + y + z$，求此立体的质量。

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

5. 计算曲线积分 $\int_L (x^2-2y)dx-(x+y^2)dy$，其中 L 为 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $A(0,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的一段弧。

四、

得分	评卷人

应用题（10分）

求平面曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1$ (x 吵$0,y$ 0) 上的点到坐标原点的最长与最短距离.

五、

得分	评卷人

证明题（10分）

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0, & (x^2+y^2=0)\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

装 订 线

微积分 A（二）（期中）参考答案及评分标准
2015 年 05 月 3 系

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\frac{1}{2}$； 2. $\frac{dx+dy}{1+e^z}$； 3. $1+2\sqrt{3}$； 4. $\frac{\pi}{8}\mu R^4$； 5. $\frac{7}{3}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D 2. D 3. C 4. A 5. D

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1.解答：$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f_1'-\frac{1}{x^2y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f_{12}''(-\frac{1}{xy^2})-\frac{1}{x^2}\left[-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''(-\frac{1}{xy^2})\right]$$
$$=\frac{1}{x^3y^2}f_{12}''+\frac{1}{x^2y^2}f_2'+\frac{1}{x^3y^3}f_{22}''。$$

2. 解答：（1）$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$

$$\mathrm{d}z=\frac{(-\varphi'+2x)\mathrm{d}x+(-\varphi'+2y)\mathrm{d}y}{\varphi'+1}(\varphi'\neq-1)$$

（2）$u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{1}{x-y}(\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1})=\frac{2}{\varphi'+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''(1+\frac{\partial u}{\partial x})}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''(1+\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1})}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''(1+2x)}{(\varphi'+1)^3}$$

3. 解答：（方法 1）原式$=\iint\limits_D(x^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$$
$$=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{45}{32}\pi$$

（方法 2）原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}(r\cos\theta+r\sin\theta)^2r\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}(1+2\sin\theta\cos\theta)r^3\mathrm{d}r$

$$=\frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+2\sin\theta\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta \qquad =\frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{45}{32}\pi$$

4. 解答：$M=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}v$

$$=0+0+\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\pi}{3}$$

方法 2：

$$M=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}v=0+0+\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\,dxdy=\int_0^1 z\cdot\pi z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}$$

5. 解答：补线 $\overline{BA}$：$y=0$，x 从 2 变到 0。

$\int_L(x^2-2y)dx-(x+y^2)dy$

$=\int_{L+\overline{BA}}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2y)dy+\int_{\overline{AB}}(x^2-2y)dx-(x+\sin^2y)dy$

$=-\iint\limits_D(-1+2)dxdy+\int_0^2x^2dx$

$=-\frac{1}{2}\pi+\frac{8}{3}$

四、应用题（10 分）

解答：令 $L(x,y,l)=x^2+y^2+l(x^3-xy+y^3-1)$

$$\begin{cases} L_x = 2x + l(3x^2 - y) = 0 \\ L_y = 2y + l(3y^2 - x) = 0 \\ L_l = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

假设$x > 0, y > 0$. 因为l ¹ 0，所以$\dfrac{2x}{2y} = \dfrac{l(3x^2 - y)}{l(3y^2 - x)}$? x $y = 1$.

由实际问题知此问题有最大值和最小值，所以

最长距离$d_M = \max\{\sqrt{x^2 + y^2} \mid (x,y) = (1,1),(x,y) = (0,1),(x,y) = (1,0)\} = \sqrt{2}$.

最短距离$d_m = \min\{\sqrt{x^2 + y^2} \mid (x,y) = (1,1),(x,y) = (0,1),(x,y) = (1,0)\} = 1$

,

五、证明题（10分）

解答：由$0 \le \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} < \dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0, (x \to 0, y \to 0)$,

得$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$，因此$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续；

又$f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$,

$f_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{0}{\Delta y} = 0$,

所以$f(x,y)$在点$(0,0)$偏导数存在.

因 为 $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta z - \mathrm{d}z}{\rho} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - \mathrm{d}z}{\rho} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x^2 \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2}$ 且

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}} \dfrac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta x^2 k^2 \Delta x^2}{(\Delta x^2 + k^2\Delta x^2)^2} = \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$，故$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z - \mathrm{d}z}{\rho}$不存在，因此由可微定义知$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微分.

装 订 线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

2015-04-29

课程编号：201411002 课程名称：微积分 A(二)(期中)

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

得分	评卷人

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$ 的值为________.

2. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度向量 $\mathrm{grad}u|_M$ 为________.

3. 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$________.

4. L 为曲线 $x^2+y^2=3x$，计算积分 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$________.

5. L 为以点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$ 和 $D(0,-1)$ 为顶点的正方形回路，方向为逆时针方向，$\oint_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=$________.

得分	评卷人

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

说明：请将以下单项选择题的答案按题号填入下表中.

1	2	3	4	5

1. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-az,y-bz)=0$ 所定义的隐函数，其中 F 是关于变量 u,v 任意可微函数，a,b 为常数，则必有________.

(A) $b\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；　(B) $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；

(C) $b\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；　(D) $a\dfrac{\partial z}{\partial x}-b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；

2. 设函数 $z=f(x,y)=x^{y^2}$，则下列结论正确的是________.

(A) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}>0$　(B) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}<0$

(C) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\neq 0$　(D) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则________.

(A) 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在，但 $f(x,y)$ 在点（0，0）处不连续

(B) $f(x,y)$ 在点（0，0）处连续

(C) 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在

(D) 以上都不正确

4. 设函数 $z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$，则函数 $z=f(x,y)$________.

(A) 无极值　(B) 有有限个值

(C) 有无穷多个极大值　(D) 有无穷多个极小值

5. 设 D 为平面区域 $|x|+|y|\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值为________.

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) 1

三、

得分	评卷人

计算题（每小题8分，共40分）

1. 设函数 $z=\frac{1}{x}f(xy,x)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 求空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线和法平面方程.

3. 求函数 $z=x^2(1+y^2)+ye^y$ 的极值.

4. 设函数 $f(u)$ 可微，$f(0)=0$，又 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，求 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$

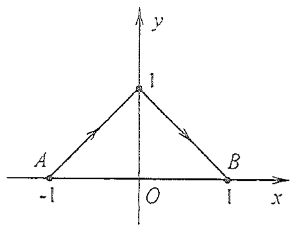
及 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^4}$

装 订 线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

5. 计算曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 沿 $y=1-|x|$ 到点 $B(1,0)$ 的折线段（如下图）.



四、

得分	评卷人

应用题（每小题10分，共20分）

1. 试求在圆锥 $Rz = h\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=h$ 所围锥体内所作出的底面平行于 xoy 平面的有最大体积的长方体.（$R>0, h>0$）

2. 已知曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围成的物体内任意一点的密度与该点到原点的距离成正比（比例系数为 K），求此物体的重心坐标.

五、

得分	评卷人

证明题（10分）

若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$，试证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，并求此点的全微分.

装 订 线

微积分 A（二）（期中）参考答案及评分标准
2015 年 04 月 29 日

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 2； 2. $\frac{2}{9}(i+2j-2k)$； 3. $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$； 4. 18； 5. 0.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B　2. D　3. C　4. C　5. A

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解法一：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot f_1'\cdot x=f_1'$ ……………………4 分

因为 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，所以

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=yf_{11}''+f_{12}''$ ……………………4 分

解法二：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f+\frac{y}{x}f_1'+\frac{1}{x}f_2'$ ……………………4 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f_1'\cdot x+\frac{1}{x}f_1'+\frac{y}{x}f_{11}''\cdot x+\frac{1}{x}f_{21}''\cdot x=yf_{11}''+f_{12}''$ ……………4 分

2. 解答：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x$，$G(x,y,z)=2x-3y+5z-4$，于是

$F_x=2x-3$，$F_y=2y$，$F_z=2z$，$G_x=2$，$G_y=-3$，$G_z=5$；

它们在点 $P_0(1,1,1)$ 的值为

$F_x=-1$　$F_y=2$　$F_z=2$　$G_x=2$　$G_y=-3$　$G_z=5$，

由 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1\neq 0$，

得曲线在（1，1，1）的切线方程

$\frac{x-1}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z-1}{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}}$　即　$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$，……………4 分

曲线在（1，1，1）的法平面方程为

$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$ 即 $16x+9y-z=24$. ……………4 分

3. 解答：令 $z_x'=2x(1+y^2)=0$，$z_y'=2yx^2+(y+1)e^y=0$，得驻点 $p(0,-1)$. …2 分

$A=z_{xx}''\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=2(1+y^2)\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=4$，$B=z_{xy}''\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=4xy\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=0$，

$C=z_{yy}''\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=2x^2+(y+2)e^y\big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=e^{-1}$. ……………………3 分

因为 $AC-B^2=4e^{-1}>0, A>0$，故 $p(0,-1)$ 为极小值点，极小值为 $z(0,-1)=-e^{-1}$.

……………3 分

4. 解答：$F(t)$ 是含参变量 t 的三重积分，为求 F 对 t 的导数，先将其化为累次积变上限定积分的形式. 采用球坐标，则

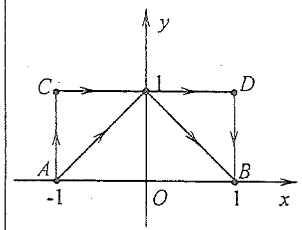
$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr$$ ……………3 分

所以有：$\frac{dF}{dt}=4\pi t^2 f(t)$. ……………………1 分

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr}{4t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi t^2 f(t)}{4t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\pi f(t)}{t}=\pi f'(0)$$ ……4 分

5. 解法一：$P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，故积分与路径无关.

如图：做点 $C(-1,1)$ 和 $D(1,1)$，连接线段 AC、CD 和 DB，方向分别由 $A\to C$、$C\to D$ 和 $D\to B$，则 ……………………4 分



$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

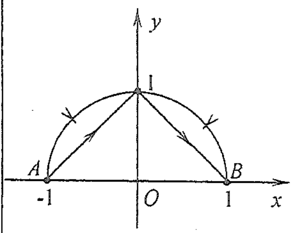
$=\int_{AC}+\int_{CD}+\int_{DB}$

$=\int_0^1\frac{-1}{1+y^2}dy+\int_{-1}^1\frac{-1}{1+x^2}dx+\int_1^0\frac{1}{1+y^2}dy$

$=-\pi$. ……………………4 分

解法二：$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，故积分与路径无关.

如图，做曲线 L'：以 O 为圆心做半径为 1 的上半圆 $x^2+y^2=1$，方向取为顺时针方向，则 ……………………………………4 分



$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{L'} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{L'} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\int_\pi^0 \cos t\,\mathrm{d}\sin t-\sin t\,\mathrm{d}\cos t$$
$$=\int_\pi^0 (\cos^2 t+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$
$$=-\pi$$ ……………………………………4 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

1 解答：设长方体平行于 xoy 面的面上四个顶点坐标 $(x,y,z),(-x,y,z),(x,-y,z),(-x,-y,z)$，则长方体体积为 $V=2x2y(h-z)=4xy(h-z)$，于是问题可归结为求目标函数 $V=4xy(h-z)$ 满足约束条件 $Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$ 下的最大值. ……………………………3 分

作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=4xy(h-z)+\lambda(Rz-h\sqrt{x^2+y^2})$，

则 $\begin{cases} F_x=4y(h-z)-\lambda h\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \\ F_y=4x(h-z)-\lambda h\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \\ F_z=-4xy+\lambda R=0 \\ F_\lambda=Rz-h\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}R \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}R \\ z=\dfrac{2}{3}R \\ \lambda=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R \end{cases}$， ……………5 分

根据题意，最大值存在，因此求得的稳定点就是最大值点. 故长方体体积最大值为 $V=\dfrac{8}{27}R^2h$. ……………………………………2 分

2. 解答：由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$， ……………………2 分

$$\bar{z}=\frac{K\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V}{K\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V}$$

其中 $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\cos\varphi\sin\varphi dr$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\cos^6\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{64}{35}\pi$$ ……………………3 分

$$\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{5}\pi$$

……………………3 分

所以 $\bar{z}=\dfrac{8}{7}$，即重心坐标为 $(0,0,\dfrac{8}{7})$. ……………………………………2 分

五、证明题（10 分）

证法 1：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\dfrac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$。 ……………………………4 分

因为 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，故有 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$， 所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-(1(x-0)+0(y-0))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，并求此点的全微分 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=\mathrm{d}x$。 ……………………6 分

证法 2：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow f(0,0)=0$ ……………………………2 分

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-x(y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\dfrac{f(x,0)-x}{|x|}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\dfrac{f(x,0)-x}{x}\dfrac{x}{|x|}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\dfrac{f(x,0)-x}{x}=0\Rightarrow f_x'(0,0)=1$。 ……………………………3 分

同理 $f_y'(0,0)=0$。 ……………………………………2 分

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-(f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\Rightarrow$ 可微。 ……………………3 分

装 订 线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2013-2014 年 第二 学期）

2014-4-30

课程编号： 0911002 课程名称： 微积分 A（二）期中考试

题号	一	二	三	四	总分
分数					
评卷人					

得分	评卷人

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. 设函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点处的偏导数存在，则 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(a,b+y)-f(a,b-y)}{y}=$________.

2. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分为________.

3. 设 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+by$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则 $f(x,y)=$________.

4. 二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.（其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域）

5. 交换积分次序 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

得分	评卷人

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. 若 $f(x,x^2)=x^4+2x^3+x, f_1'(x,x^2)=2x^2-2x+1$, 则 $f_2'(x,x^2)=$________.

(A) $2x^2+2x+1$ (B) $2x^2+3x+\dfrac{1}{2x}$

(C) $2x^2-2x+1$ (D) $2x^2+3x+1$

2. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 点 P 处的切平面平行于 $2x+2y+z=1$，则 P 点坐标为________.

(A) $(-1,1,2)$ (B) $(1,-1,2)$ (C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

3. 若区域 D 是由 $x=0,y=0,x+y=\dfrac{1}{2},x+y=1$ 所围成，设 $I_1=\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 I_1,I_2,I_3 的大小顺序是________.

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_1>I_2>I_3$ (C) $I_1<I_3<I_2$ (D) $I_3<I_1<I_2$

4. 若区域 D 由 $x^2+y^2=2x$ 所围成，则 $\iint\limits_D(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$

(D) $\iint\limits_D(x+y)\sqrt{2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

5. 对于格林公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，下述说法正确的是________.

(A) L 取逆时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 内存在一阶偏导数且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

(B) L 取顺时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 内存在一阶偏导数且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

(C) L 为 D 的正向边界，函数 P,Q 在闭区域 D 内存在一阶连续偏导数

(D) L 取顺时针方向，函数 P,Q 在闭区域 D 内存在一阶连续偏导数

得分	评卷人

三、计算题（每小题8分，共56分）

1. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $z=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq 0$，（1）求 $\mathrm{d}z$；（2）记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

3. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq\pi\}$.

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)z\mathrm{d}V$，其中积分区域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 1$.

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

5. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y)^2\mathrm{d}S$，其中 Σ 是立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的全表面.

6. 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 L 是 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段.

7. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0, & (x^2+y^2=0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

四、

得分	评卷人

综合题（每小题7分，共14分）

1. 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\}$，小山的高度为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使（1）中 $g(x,y)$ 的达到最大值的点，试确定攀登起点的位置.

2. 求由 $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ 所围成的立体体积.

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2013 年 春季 学期）

2013-4-27

课程编号： 0911001 课程名称： 微积分 A（二）期中考试

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

得分	评卷人

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=$__________.

2. 设曲面 $ax^n+by^n+cz^n=1$，n是正整数，则曲面上点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为__________.

3. 设函数$f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$在点$M(1,2,-1)$处沿$z$轴正向的方向导数有最大值64，则$a=$____；$b=$____；$c=$____.

4. 设 $I=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$，其中$f(x,y)$连续，交换积分次序$I=$__________.

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$，a与b为常数 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，则$\iint\limits_D\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}d\sigma=$__________.

得分	评卷人

二、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，则必有（　）.

(A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$　(B) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$　(D) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$

2. 已知$x>0,y>0$时，$\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则$a$等于（　）.

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

3. 设$f(x,y)$在$(0,0)$的某个邻域内有定义，且$f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1$，则下列结论正确的是（　）.

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

(B) 曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处的法向量为$\{3,1,-1\}$

(C) 曲面$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{1,0,3\}$

(D) 曲面$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{3,0,1\}$

4. 设$I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2d\sigma$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则（　）.

(A) $I_3>I_2>I_1$　(B) $I_1>I_2>I_3$　(C) $I_2>I_3>I_1$　(D) $I_3>I_1>I_2$

5. 函数$u=\sin x\sin y\sin z$在条件$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$下的最大值是（　）.

(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{6}$　(C) 1　(D) 0

三、

得分	评卷人

计算题（每小题7分，共49分）

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

2. 设 $u=x^{y^z}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

3．求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ z^2=3x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $M_0\,(1,-1,2)$ 处的切线方程.

4. 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z$.

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

5. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，$\Omega$ 是由曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2$，$z=8$ 所围的立体.

6. 计算 $I=\int_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]\mathrm{d}s$，$L:x^2+(y-1)^2=1$.

7. 计算曲线积分 $\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $A(2,0)$ 到点 $o(0,0)$ 的曲线段.

得分	评卷人

四、应用题（14分）

1. 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品的广告. 根据统计资料，销售收入 R（万元）与电台广告费用 x_1（万元）的及报纸广告费用 x_2（万元）之间的关系有如下的经验公式：

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2,$$

求公司取得最大利润时的电台广告费用 x_1 和报纸广告费用 x_2.

2. 设有平面力场 $\vec{F}=2y^3\vec{i}+(x^4+6y^2x)\vec{j}$， L 是由折线 AOB $(A(0,1), O(0,0), B(1,0))$ 及弧线 BA 所围成的正向闭曲线，弧线 BA 的方程由 $x^4+y^4=1$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ 给出，求此力场沿曲线 L 运动一周所作的功.

得分	评卷人

五、证明题（7分）

设 $f(x)$ 连续 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega: 0\leq z\leq 1,\ x^2+y^2\leq t^2\ (t>0)$.

试证明： $F'(t)=2\pi t f(-t^2)$.

2012级微积分A（二）期中考试题

一， 填空题（每小题3分，共15分）

1.或者 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2y^2}}=\underline{0}$ 。

2，设曲面 $ax^n+by^n+cz^n=1$，n 是正整数，则曲面上点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的切平面方程为 $\underline{ax_0^{n-1}x+by_0^{n-1}y+cz_0^{n-1}z=1}$

3，设函数 $f\left(x,y,z\right)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M\left(1,2,-1\right)$ 处沿 z 轴正向的方向导数有最大值64，则 $a=\underline{6}$；$b=\underline{24}$；$c=\underline{-8}$.

(因为：$gradf\left(1,2,-1\right)//\left\{0,0,1\right\}\Rightarrow\begin{cases}4a+3c=0\\4a-b=0\\2b-2c=t>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-\dfrac{4a}{3}\\b=4a\\2b-2c=t>0\end{cases}$，

$\left|gradf\left(1,2,-1\right)\right|=64\Rightarrow\sqrt{\left(2b-2c\right)^2}=64\Rightarrow a=6\Rightarrow a=6,\ b=24,\ c=-8$）

4．设 $I=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f\left(x,y\right)dy$，其中 $f\left(x,y\right)$ 连续，交换积分次序 $I=$

$\underline{\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f\left(x,y\right)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f\left(x,y\right)dx}$

5. 设 $f(x)$ 在[0，1]上连续，且 $f(x)>0$，a 与 b 为常数. $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，

则 $\iint\limits_D\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}d\sigma=\underline{\dfrac{1}{2}(a+b)}$.

（$I=\iint\limits_D\dfrac{af\left(x\right)+bf\left(y\right)}{f\left(x\right)+f\left(y\right)}d\sigma=\iint\limits_D\dfrac{af\left(y\right)+bf\left(x\right)}{f\left(y\right)+f\left(x\right)}d\sigma$，

$\therefore 2I=\iint\limits_D\left(a+b\right)d\sigma=a+b,\quad I=\dfrac{1}{2}\left(a+b\right)$.）

二， 单项选择题（每小题3分，共15分）

1、设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，则必有（ B ）

（A）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　（B）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

（C）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　（D）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2、已知$x>0,y>0$时，$\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则$a$等于（D）

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

3.设$f(x,y)$在$(0,0)$的某个邻域内有定义，且$f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1$，则下列结论正确的是（B）

（A）$dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

（B）曲面$z=f(x,y)$在点 $(0,\ 0,\ f(0,0))$处的法向量为$\{3,1,-1\}$

（C）曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点 $(0,\ 0,\ f(0,0))$处的切向量为$\{1,0,3\}$

（D）曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点 $(0,\ 0,\ f(0,0))$处的切向量为$\{3,0,1\}$

4. 设$I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则（A）

（A）$I_3>I_2>I_1$　（B）$I_1>I_2>I_3$　（C）$I_2>I_3>I_1$（D）$I_3>I_1>I_2$

5. 函数$u=\sin x\sin y\sin z$在条件$x+y+z=\frac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$下的最大值是（ A ）

（A）$\frac{1}{8}$，（B）$\frac{1}{6}$，（C）1，（D）0.

三，　计算题（每小题 7 分，共 49 分）

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点（1，1）处可微，且 $f(1,1)=1$，$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2$，$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$，

$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$

解答：$\frac{d}{dx}f^3(x)\Big|_{x=1}=51$

2. 设 $u=x^{y^z}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

解答：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{y^z\ln x}\right]=y^z x^{y^z-1}=\frac{uy^z}{x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{y^z\ln x}\right]=x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1}=uzy^{z-1}\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{y^z\ln x}\right]=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=uy^z\ln x\ln y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uy^z}{x}\right)=\frac{y^z}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{uy^z}{x^2}=\frac{y^z}{x}\cdot\frac{uy^z}{x}-\frac{uy^z}{x^2}=\frac{uy^z\left(y^z-1\right)}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(uzy^{z-1}\ln x\right)&=\left(zy^{z-1}\ln x\right)\frac{\partial u}{\partial y}+uz\ln x\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{z-1}\right)\\&=\left(zy^{z-1}\ln x\right)\cdot\left(uzy^{z-1}\ln x\right)+uz\ln x\cdot(z-1)y^{z-2}\\&=uz\ln xy^{z-2}\left(zy^z\ln x+z-1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(uy^z\ln x\ln y\right)&=\left(y^z\ln x\ln y\right)\frac{\partial u}{\partial z}+u\ln x\ln y\frac{\partial}{\partial z}\left(y^z\right)\\&=\left(y^z\ln x\ln y\right)\left(uy^z\ln x\ln y\right)+u\ln x\ln y\cdot y^z\ln y\\&=uy^z\ln x\ln^2 y\left(1+y^z\ln x\right)\end{aligned}$$

3．求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2-3x^2+y^2\end{cases}$在点$M_0\ (1,-1,2)$处的切线。

解答：方程两边对x求导，得$\begin{cases}3y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-2x\\ y\dfrac{dy}{dx}-z\dfrac{dz}{dx}=-3x\end{cases}$，从而$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{5x}{4y}$，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{7x}{4z}$

该曲线在$(1,-1,2)$处的切向量为$\vec{T}=(1,\frac{5}{4},\frac{7}{8})=\frac{1}{8}(8,10,7)$.

故所求的切线方程为$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$

4. 计算$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \dfrac{\sin z}{(1-z)^2}dz$

解答：由于被积函数$\dfrac{\sin z}{(1-z)^2}$没有原函数，因此直接无法积出，须交换积分次序。

先交换y, z，此时视x为常量，有

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}dz=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_z^x \frac{\sin z}{(1-z)^2}dy=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin z}{(1-z)^2}\cdot(x-z)dz$$

上述积分还是不能积出，故再交换x, z，此时视y为常量，有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin z}{(1-z)^2}\cdot(x-z)dz=\int_0^1 dz\int_z^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2}\cdot(x-z)dx\\&=\int_0^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2}\cdot\left[\frac{1}{2}(x-z)^2\right]_z^1 dz=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin z dz=\frac{1}{2}(1-\cos 1)\end{aligned}$$

5. 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, Ω是由曲线$y^2=2z$，$x=0$绕Z轴旋转一周而成的曲面与两平面Z=2，Z=8所围的立体。

解法一： 截面法

旋转曲面方程 $x^2+y^2=2z$，$2\le z\le 8$

$$D(z): x^2+y^2 \le 2z$$

$$I=\int_2^8 dz \iint_{D(z)} (x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2z}} r^2 \cdot r dr = 336\pi$$

解法二：使用柱面坐标，在柱面坐标系中，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$D(z): x^2+y^2 \le 2z \Rightarrow r^2 \le 2z \Rightarrow 0 \le r \le \sqrt{2z}$$

$$I=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2z}} r^2 \cdot r dr = 336\pi$$

6. 计算 $I=\oint_L \left[\left(x+\sqrt{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right]ds$， $L: x^2+\left(y-1\right)^2=1$。

解答： L 关于 y 轴对称，所以 $\oint_L \left[x\sqrt{x^2+y^2}\right]ds=0$

$$I=\oint_L \left[\sqrt{y}\sqrt{2y}+2y\right]ds=\left(2+\sqrt{2}\right)\oint_L yds=2\left(2+\sqrt{2}\right)\pi$$

7. 计算曲线积分 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的曲线段。

解答：补线 OA： $y=0 \quad (x:0\to 2)$，

$$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\oint_{L+OA}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy-\int_{OA}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\iint_D 0\,dxdy-\int_0^2 x^2dx=-\frac{8}{3}。$$

四， 应用题（14 分）

1，某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品的广告. 根据统计资料, 销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)的及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下的经验公式: $R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$，

求公司取得最大利润时的电台广告费用 x_1 和报纸广告费用 x_2。

解答：公司利润为$L=R-x_1-x_2=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$

令$\begin{cases}L'_{x_1}=13-8x_2-4x_1=0,\\ L'_{x_2}=31-8x_1-20x_2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}4x_1+8x_2=13,\\ 8x_1+20x_2=31,\end{cases}$

得驻点$(x_1,x_2)=(\frac{3}{4},\frac{5}{4})=(0.75,1.25)$,而

$A=L''_{x_1x_1}=-4<0$, $B=L''_{x_1x_2}=-8$, $C=L''_{x_2x_2}=-20$,

$D=AC-B^2=80-64>0$,

所以最优广告策略为:

电台广告费用0.75(万元),报纸广告费用1.25(万元).

公司利润最大

2. 设有平面力场 $\vec{F}=2y^3\vec{i}+(x^4+6y^2x)\vec{j}$ ，L 是由折线 AOB $(A(0,1), O(0,0), B(1,0))$ 及弧线BA所围成的正向闭曲线，弧线BA的方程由 $x^4+y^4=1$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ 给出，求此力场沿曲线L运动一周所作的功。

解答: $W=\oint_L 2y^3dx+(x^4+6y^2x)dy=\iint\limits_D (4x^3+6y^2-6y^2)dxdy$

五， 证明题（7分）

设 $f(x)$ 连续 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2-t^2\right)dxdydz$ 其中 $\Omega: 0\leq z\leq 1,\ x^2+y^2\leq t^2$，（$t>0$）试证明：$F'(t)=2\pi tf\left(-t^2\right)$。

证明：$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2-t^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t dr\int_0^1 f\left(r^2-t^2\right)rdz$

$=2\pi\int_0^t f\left(r^2-t^2\right)rdr=\pi\int_0^t f\left(r^2-t^2\right)d\left(r^2-t^2\right)=\pi\int_{-t^2}^0 f\left(u\right)du=-\pi\int_0^{-t^2} f\left(u\right)du$

$F'(t)=2\pi tf\left(-t^2\right)$。

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学试卷

考试科目：高等数学A（二）期中考试

解答下列各题，每题10分，共10题.

一、设z是方程$x+y-z=e^z$所确定的x与y的函数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

二、设$u=f(x,y,z)$，$z=ye^x$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											
评卷人											

三、求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3x \\ 2x-3y+5z=4 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程.

14

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

四、计算 $\int_0^1 dx\int_x^1 x^2 e^{-y^2}dy$.

五、计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

六、计算 $I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+2x)dxdydz$，其中Ω是由曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕 oz 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2$，$z=8$ 所围之形体.

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

七、计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

八、有一半径为 R 的球体，P_0 是此球面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置.

八

姓名：________ 学号：________ 班级：________

装 订 线

九、设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0.\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

十、设 $f(x)$ 是连续函数且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x^2+y^2)dxdy},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x^2+y^2)dxdy}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}.$$

（1）讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

（2）证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

高等数学A（二）期中考试参考答案

一、设 z 是方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的 x 与 y 的函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解:（1）令 $F(x,y,z)=x+y-z-e^x$，则:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{1+e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{1+e^z}$$

（2）$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+e^z}\right)=\frac{-e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}=\frac{-e^z}{(1+e^z)^3}.$$

二、设 $u=f(x,y,z)$， $z=ye^x$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

解：$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+e^x f_3'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=f_{21}''+ye^x f_{23}''+e^x f_{31}''+ye^{2x}f_{33}''+e^x f_3'.$$

三、求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3x\\2x-3y+5z=4\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程.

解：1）方程组两端同时对 x 求导数，得:

$$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}-3=0,\\2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

2）以 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$ 为变量，解此方程组，得:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{15-10x+4z}{10y+6z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{-4y-6x+9}{10y+6z}.$$

从而 $$T=\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\}=\left\{1,\frac{9}{16},-\frac{1}{16}\right\}.$$

3）曲线在点$(1,1,1)$处的切线方程为:

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}.$$

四、计算$\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$.

解：由于积分区域可以表示成$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le x\le y\end{cases}$，所以

$$\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^y dx=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-y^2}y^2dy^2=\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-u}udu\ \text{（令}\ y^2=u\ \text{）}$$

$$=-\frac{1}{6}ue^{-u}\Big|_0^1+\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-u}du=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}e^{-1}.$$

五、计算二重积分$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

解：D是正方形区域.在D上被积函数是分块表示。

$$max\{x^2,y^2\}=\begin{cases}x^2,x\ge y,\\ y^2,x\le y.\end{cases}(x,y)\in D$$

用$y=x$将D分成两块:

$$D=D_1\bigcup D_2,D_1=D\bigcap\{y\le x\},D_2=D\bigcap\{y\ge x\}$$

所以 $$I=\iint\limits_{D_1}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{y^2}dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy\quad\text{（}D\text{关于}\ y=x\ \text{对称）}$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy\ \text{（选择积分顺序）}$$

$$=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$$

六、计算$I=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+2x)dxdydz$，其中$\Omega$是由曲线$y^2=2z$，$x=0$绕$oz$轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2$，$z=8$所围之形体.

解：曲线$\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$，绕$oz$轴旋转，所得旋转面方程为$x^2+y^2=2z$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+2x)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}2xdxdydz$$

由于积分区域Ω关于 yoz 平面对称，所以 $\iiint\limits_{\Omega}2xdxdydz=0$.

故$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+2x)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_2^8 dz\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$

$$=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\cdot rdr=2\pi\int_2^8\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2z}}dz=\frac{\pi}{2}\int_2^8 4z^2dz=2\pi\frac{z^3}{3}\Big|_2^8=336\pi$$

七、计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

解：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

1）当 L 所围区域 D 内不包含原点时，则满足格林公式的全部条件，故 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$.

2）当 L 所围区域 D 内包含原点时，在区域 D 内做一个小椭圆 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$），选取 ε 足够小，使小椭圆包含在区域 D 内，设椭圆的边界曲线为 L_1，方向为逆时针，围成的区域为 D_1，则

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L-L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=0+\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta\cdot(\varepsilon\cos\theta)d\theta-\varepsilon\sin\theta\cdot(-\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta)d\theta}{\varepsilon^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi$$

八、有一半径为 R 的球体，P_0 是此球面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置.

解法一：记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 o，射线 OP_0 为正 x 轴，建立

直角坐标系，则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$，球面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得 $\bar{y}=0,\bar{z}=0$

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\cdot k[(x-R)^2+y^2+z^2]dV}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2+y^2+z^2]dV}$$

而 $\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2+y^2+z^2]dV$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV+\iiint\limits_{\Omega}R^2dV$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega}x[(x-R)^2+y^2+z^2]dV=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2dV$$

$$=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{x}=-\frac{R}{4}$.

因此，球体 Ω 的重心位置为 $(-\frac{R}{4},0,0)$.

解法二：记所考虑的球体为 Ω，球心为 $\widetilde{O}$，以定点 p_0 为原点，线 $p_0\widetilde{O}$ 为正 z 轴建立直角坐标系，则球面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}kz(x^2+y^2+z^2)dV}{\iiint\limits_{\Omega}k(x^2+y^2+z^2)dV}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi dr=\frac{32}{15}\pi R^5$$

而 $\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi dr$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6$$

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$.因此，球体Ω的重心位置为$(0,0,\frac{5}{4}R)$.

九、设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0.\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但不可微分.

因为$0\le\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\le\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$

且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$,所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

即$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

又$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$

所以$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$

从而$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0$

因此$f(x,y)$在点（0，0）处不可微分.

十、设$f(x)$是连续函数且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f(x^2+y^2)dxdy},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f(x^2+y^2)dxdy}{\int_{-t}^{t}f(x^2)dx}.$$

（1）讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

（2）证明：当$t>0$时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

解：（1）因为 $$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr},$$

所以 $$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{[\int_0^t f(r^2)rdr]^2}$$

因此，在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调增加.

（2）因为 $$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_{-t}^t f(r^2)dr}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr},$$

令 $$g(t)=\int_0^t f(r^2)dr\int_0^t f(r^2)r^2dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2,$$

所以 $$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0.$$

故 $g(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调增加.

又因为 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$g(t)>g(0)$，因此不等式成立.

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学试卷

考试科目：高等数学期中考试

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

每题 10 分，共 10 题。

一、设 $f(x,y)=x^2z^3e^y$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 所确定的隐函数，求 $f'_x(1,1)$。

二、已知 $z=uv$，$x=u+\frac{1}{v}$，$y=v+\frac{1}{u}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

三、设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $p(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 p 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数。

四、计算 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x\sin y^3 dy$。

19

姓名：________ 学号：________ 班级：________

装 订 线

五、已知平面区域 D 为曲线 $x^2+y^2=2ax$ 与 $x^2+y^2=2ay$ 围成的公共部分，面密度 $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，求平板 D 的质量 m。

六、计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+z^2)dv$，$\Omega$ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 围成的公共部分。

七、试求半径为 R 的上半球壳的重心，已知其密度等于点到铅锤直径的距离。

八、计算 $\oint_{C^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，$C$ 为以 $(1,0)$ 为圆心，以 R 为半径的圆周（$R\neq1$），C^+ 表示其方向为逆时针方向。

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

九、在变力 $\bar{F} = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\bar{F}$ 所做的功 W 最大？并求出 W 的最大值。

十、（1）设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分。

（2）设 $f(t)$ 连续，证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy = \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)dt$ 其中 A 为正常数，$D:|x|\le\dfrac{A}{2},|y|\le\dfrac{A}{2}$。

70

高等数学A（二）期中考试参考答案及详解

一、解：$f_x'(x,y)=2xz^3e^y+3x^2z^2e^y\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

把 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 两边分别对 x 求偏导，得

$2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3yz-2x}{2z-3y}$。

所以 $f_x'(x,y)=2xz^3e^y+3x^2z^2e^y\dfrac{3yz-2x}{2z-3y}$。

再令 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 中 $x=1$，$y=1$。可解得 $z=1,\ 2$。

所以将 $x=1$，$y=1$，$z=1$ 和 $x=1$，$y=1$，$z=2$ 代入

$f_x'(x,y)=2xz^3e^y+3x^2z^2e^y\dfrac{3yz-2x}{2z-3y}$，可得 $f_x'(1,1)=-e$ 或 $64e$。

二、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}=1\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases} \text{解得} \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u^2v^2}{u^2v^2-1}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{v^2}{u^2v^2-1}\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{uv^2+u^2v^3}{u^2v^2-1}=\frac{yz^2}{z^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2yz\dfrac{\partial z}{\partial x}(z^2-1)-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}yz^2}{(z^2-1)^2}=\frac{-2y^2z^3}{(z^2-1)^3}$$

三、解：令 $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，则曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $p(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为

$\vec{n}=\{f_x,f_y,f_z\}_{(1,1,1)}=\{4x,6y,2z\}_{(1,1,1)}=\{4,6,2\}$

所以 $\vec{n}$ 的方向余弦是 $\left\{\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right\}$。

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=-\sqrt{14}$

所以$u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在$p(1,1,1)$点处的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}+(-\sqrt{14})\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}。$$

四、解：
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1dx\int_x^1 x\sin y^3dy\\&=\int_0^1dy\int_0^y x\sin y^3dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sin y^3\Big|_0^y dy\\&=\frac{1}{6}\int_0^1\sin y^3dy^3\\&=-\frac{1}{6}\cos y^3\Big|_0^1\\&=\frac{1}{6}(1-\cos 1)\end{aligned}$$

五、解：
$$\begin{aligned}m&=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma\\&=\iint_{D_1}r^2dr+\iint_{D_2}r^2dr\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}r^2dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^3\Big|_0^{2a\sin\theta}d\theta+\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r^3\Big|_0^{2a\cos\theta}d\theta\\&=\frac{8}{3}a^3\left[(-\cos\theta+\cos^3\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(\sin\theta-\sin^3\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right]\\&=\frac{8a^3}{3}\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\sqrt{2}\right)。\end{aligned}$$

六、解：由于积分区域关于平面 yoz 对称，$\iiint_\Omega 2xdv=0$。故 $I=\iiint_\Omega(2x+z^2)dv=\iiint_\Omega z^2dv$。用柱坐标计算$\iiint_\Omega z^2dv$。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z^2dv&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}rdr\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2dz\\&=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}rz^3\Big|_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}dr\\&=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}-3r^3R+4rR^3+2r^3\sqrt{R^2-r^2}-5rR^2\sqrt{R^2-r^2}dr\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi}{30}\left(-15r^4R+40r^2R^3-25R^5+20R^2(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+8(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5$$

七、解：密度$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，球壳的方程为$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$D:x^2+y^2\le R^2$，由对称性可知，重心必在Z轴上，即$x=y=0$。

$$dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$M=\iint_{\Sigma}\rho dS$$

$$=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr$$

$$=\frac{\pi^2}{2}R^4$$

$$\iint_{\Sigma}z\rho dS$$

$$=\iint_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2dr$$

$$=\frac{2\pi}{3}R^3$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_{\Sigma}z\rho dS=\frac{4}{3\pi}R$$

所以重心坐标为$(0,0,\frac{4R}{3\pi})$。

八、解：设$D:(x-1)^2+y^2\le R$，$P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$,$Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$,则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

1）显然当$R<1$时，原点不在C^+所围成的区域D内，故P，Q有一阶连续偏导数，满足格林公式的条件，所以

$$\oint_{C^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D}0dxdy=0$$

2）当 $R \ge 1$ 时，原点在 C^+ 所围成的区域 D 内，而 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ，$\frac{\partial P}{\partial y}$ 在原点处因分母皆为零而不存在，故他们在 D 上不连续，不满足格林公式的条件。为利用格林公式，补一条线 L： $4x^2+y^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\cos t, y=\sin t$ ，并规定其方向为顺时针方向。

$$\oint_{C^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{C^++L}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\oint_{L}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\iint_{D_1} 0dxdy-\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}\frac{1}{2}dt=\pi \text{。}$$

九、 解：设从原点到第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 的直线的方程为 $\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{z}{\zeta}=t$ ，则

$$W=\int_{(0,0,0)}^{(\xi,\eta,\zeta)} yzdx+zxdy+xydz$$

$$=\int_0^1(\eta t)\cdot(\zeta t)d\xi t+(\zeta t)\cdot(\xi t)d\eta t+(\xi t)\cdot(\eta t)d\zeta t$$

$$=3\xi\eta\zeta\int_0^1 t^2dt=\xi\eta\zeta$$

故问题可转化为在满足 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$ 限制下求 $W=\xi\eta\zeta$ 的条价极值。

用拉格朗日乘子法，设 $L(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta-\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$，令

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial \xi}=\eta\zeta-\lambda\frac{2\xi}{a^2}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \eta}=\xi\zeta-\lambda\frac{2\eta}{b^2}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \eta}=\xi\eta-\lambda\frac{2\zeta}{b^2}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$

解得 $\lambda=-\frac{3}{2}\xi\eta\zeta$ ， $\xi=\frac{a}{\sqrt{3}}$， $\eta=\frac{b}{\sqrt{3}}$ ， $\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$ ，所以 $W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$

十、（1）证明：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$（由 $|xy|\le\frac{x^2+y^2}{2}$， 有 $x^2y^2\le\frac{(x^2+y^2)^2}{4}$ ，

从而 $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\le\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{4}$ 易得）

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$ ，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，所以 $f_x'(0,0)=0$，同理 $f_y'(0,0)=0$，但

$$\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\frac{\dfrac{(\Delta+\Delta x)^2(0+\Delta y)^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}-0}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{1/2}}=\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2},$$

当 $\Delta x^2+\Delta y^2\to 0$ 时极限不存在。所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微。

（2）证明:等式的左端为二重积分，右端为一定积分，故应考虑将二重积分化为二次积分，并设法求出内层积分。

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}dx\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}}f(t)dt \quad （令 t=x-y ）$$

这个二次积分只与 t 有关，故交换积分次序，内层积分即可求出。

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-A}^{0}dt\int_{-\frac{A}{2}}^{t+\frac{A}{2}}f(t)dx+\int_0^A dt\int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}f(t)dx$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)(A+t)dt+\int_0^A f(t)(A-t)dt$$

$$=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)dt$$

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学期中考试试卷

（ 2018-2019 年 第二 学期）

2019-5

课程编号： 201411021 **课程名称：** 概率论与数理统计

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有________.

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

2. 设 A, B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是________.

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$　　(D) $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

3. 下列函数中，可作为某随机变量的分布函数的是________.

(A) $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(B) $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^x, & x\ge 0.\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有________.

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 则下列选项中正确的是________.

(A) 关于 X 的边缘分布为均匀分布

(B) 关于 Y 的边缘分布为均匀分布

(C) 在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件分布为均匀分布

(D) X 与 Y 为独立同分布的随机变量

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$ 则 $P(B)=$________.

2. 已知 $P(A)+P(B)=0.7$，且 A,B 仅发生一个的概率为 0.5，则 A,B 都发生的概率为________.

3. 某次考试中有 4 道单项选择题，每题附有 4 个备选答案，其中只有一个选项是正确的，一名考生随意地选择每题的答案，则他至少答对 3 道题的概率为________.

4. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则两数之差的绝对值大于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$________.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且服从同一分布：$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=\dfrac{k+1}{3}$ $(k=0,1)$，则概率 $P\{X=Y\}=$________.

7. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则 $P(X<0)=$________.

8. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $P\{X\ge 2\}=$________.

9.设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 在区间 $[0,3]$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 2 的指数分布，则概率 $P\{\min(X,Y)>1\}=$________.

10. 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x,\quad 0<x<1,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

令 $Z=X-Y$，则 $f_Z(z)=$______________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

1.设 A,B,C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=\frac{1}{6}$，

$P(BC)=\frac{1}{8}$，求：

（1）$P(C|A)$；（2）$P(C|\overline{B})$；（3）A,B,C 至少有一个发生的概率。

2.为防止意外，在矿井内同时安装了 A，B 两种报警系统，每系统单独使用时，有效率 A 为 0.92，B 为 0.93；在 A 失灵的条件下 B 有效的概率为 0.85，求（1）发生意外时报警系统至少一个有效的概率？（2）在 B 失灵的条件下 A 有效的概率？

3.已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a+b\arcsin x, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases},$$

求（1）常数 a 和 b；（2）X 的概率密度 $f(x)$；（3）概率 $P\{-2<X<0\}$。

4.设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度函数。

5.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A, & 0<x<1,\quad 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）A；

（2）（X，Y）的边缘概率密度 $f_X(x)$；

（3）$f_{Y|X}(y|x)$；

（4）$P\{\frac{1}{3}<Y<2\big|X=\frac{1}{3}\}$.

6.已知二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，

令随机变量 $U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$，

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度函数；

(2) 求 U 的分布律。

2019 期中答案

一、选择

1.C　2.C 3. D 4.A　5.C

二、填空

1. 1-p　2. 0.1　3. $\frac{13}{256}$　4. $\frac{1}{4}$　5. $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

6. $\frac{5}{9}$　7. 0. 2　8. $1-\frac{3}{e^2}$　9. $\frac{2}{3e^2}$　10. $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

三、计算

1. 解答：（1）$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{1}{2}$；

（2）$P(C|\overline{B})=\frac{P(C\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(C)-P(BC)}{1-P(B)}=\frac{5}{16}$；

（3）$P\{A,B,C\text{ 至少有一个发生}\}=P(A+B+C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+0=\frac{17}{24}\text{。}$$

2.解 设 A 表示"系统 A 有效"，设 B 表示"系统 B 有效"，则

$P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B\mid\overline{A})=0.85$

（1）$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})$

$$=1-P(\overline{A})[1-P(B\mid\overline{A})]=1-0.08\times 0.15=0.988$$

（2）$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A\cup B)-P(B)}{1-P(B)}=\frac{0.988-0.93}{0.07}$

$$=\frac{0.058}{0.07}\approx 0.829$$

3.解答：（1）由于连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数，将 -1 和 1 代入

$F(x)$，得到关于 a 和 b 的方程：

$$0=F(-1)=a-\frac{\pi}{2}b\text{，}\quad 0=F(1)=a+\frac{\pi}{2}b$$

解得：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{\pi}$；

（2）$F(x)$对x求导，得X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$$

（3）$P\{-2<X<0\}=F(0)-F(-2)=\frac{1}{2}$。

4.解：因$Y=2X^2+1$，故$Y\in[1,+\infty)$，当$y<1$时，$f_Y(y)=0$

当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X^2+1\le y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1$$

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}\left[2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{(y-1)}{4}}$$

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{(y-1)}{4}}, & y>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

5.解答：（1） 由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，即$\int_0^1 dx\int_0^{2x}Ady=A=1$，所以$A=1$，

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}1dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

（3）当$0<x<1$时：$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(4) $f_{Y|X}(y\Big|\frac{1}{3})=\begin{cases}\frac{3}{2},0<y<\frac{2}{3}\\0,其他\end{cases}$

$P\{\frac{1}{3}<Y<2\Big|X=\frac{1}{3}\}=\int_{\frac{1}{3}}^{2}f_{Y|X}(y\Big|\frac{1}{3})dy=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}dy=\frac{1}{2}$。

6.解（1）$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\0, & 其他\end{cases}$.

（2）$P\{U=1\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{2}$，故$P\{U=0\}=\frac{1}{2}$，因此$U$的分布律为:

U	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

2015-5-1

课程编号： 0911008 **课程名称：** 概率论与数理统计(期中)

得分	评卷人

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B|A)=0.5$，则 $P(\overline{AB})=$__________.

2. 袋中有 5 个球，其中 2 个是红球，每次取 1 个球，取出后不放回，则第 3 次取出的球是红球的概率为__________.

3. 已知离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.4, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

则 $P\{X=2\}=$__________.

4. 设将一枚骰子连掷两次，则两次抛掷出现的点数之和为 6 的概率是__________.

5. 设随机变量 X 服从参数为2的泊松分布，则 $P\{X=2\}=$__________.

6. 10 件产品中有 8 件正品，2 件次品，任选两件产品，则恰有一件为次品的概率为__________.

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)$ 为其分布函数，则对任意实数 a，有 $F(\mu+a)+F(\mu-a)=$__________.

8. 设某人向同一目标独立重复进行射击，每次射击命中的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标的概率为__________.

9. 10 把钥匙中有 3 把能打开门锁，今任取两把钥匙，则打不开门锁的概率为__________.

10. 设已知随机变量 X 服从参数 $n=2$，$p=\frac{1}{3}$ 的二项分布，$F(x)$ 为 X 的分布函数，

则 $F(1.5)=$__________.

得分	评卷人

二、单项选择题（每小题2分，共10分）

1. 设 A,B 为随机事件，则下列选项中错误的是______.

(A) 若 A 包含 B，则 $\overline{B}$ 包含 $\overline{A}$

(B) 若 A,B 对立，则 $\overline{A},\overline{B}$ 对立

(C) 若 A,B 互不相容，则 $\overline{A},\overline{B}$ 互不相容

(D) 若 A,B 相互独立，则 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立

2. 甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内，在预定地点会面，已知二人到达时刻是等可能的，先到的人等候另一人，若经过时间 $t(t<T)$ 后仍未会面，先到的人就离去，则甲乙二人能会面的概率为______.

(A) $1-\frac{t}{T}$　　(B) $\frac{t}{T}$

(C) $1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$　　(D) $\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $P\{X>a\}=$______.

(A) $\Phi(a)$　　(B) $1-\Phi(a)$

(C) $\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$　　(D) $1-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

4. 设 A,B,C 为随机事件，则下列选项中一定正确的是______.

(A) 若 $P(A)=0$，则 A 为不可能事件

(B) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 互不相容

(C) 若 A 与 B 互不相容，则 $P(A)=1-P(B)$

(D) 若 $P(AB)\neq 0$，则 $P(BC|A)=P(B|A)P(C|BA)$

5. 设若 A,B 为两个随机事件，则下列选项中正确的是______.

(A) $(A\cup B)-B=A$　　(B) $(A\cup B)-B=B$

(C) $[(A\cup B)-B]\subset A$　　(D) $[(A\cup B)-B]\supset A$

得分	评卷人

三、计算题（每小题10分，共60分）

1. 已知 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，$P(B|A)=\frac{4}{5}$，求：

（1）$P(A\cup B)$；（2）$P(A-B)$；（3）$P[\overline{B}|(A\cup B)]$。

2、设有三个盒子，第一个盒装有 4 个红球，1 个黑球；第二个盒装有 3 个红球，2 个黑球；第三个盒装有 2 个红球，3 个黑球. 若任取一盒，从中任取 3 个球。

（1）已知取出的 3 个球中有 2 个红球，计算此 3 个球是取自第一箱的概率；

（2）以 X 表示所取到的红球数，求 X 的分布律；

（3）若 $Y=\sin\frac{\pi}{2}X$，求 Y 的分布律.

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

3、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（1）求常数 A；

（2）概率 $P\left\{|x|<\frac{1}{2}\right\}$；

（3）X 的分布函数 $F(x)$。

4. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度.

5、某次抽样调查结果表明，考生的外语成绩 X（百分制）近似服从正态分布 $X\sim N(72,\sigma^2)$，并且分数在 60 分至 84 分之间的考生人数占考生总数的 68.2%，试求考生的外语成绩在 96 分以上的概率.

X	0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.841	0.977	0.999

6. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（单位：分)服从指数分布，X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$. 某顾客在窗口等待服务，若等待超过 10 分钟则离开，他一个月要去银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求概率 $P\{Y\geq 1\}$.

四、

得分	评卷人

应用题（10分）

假设某地在任何长为 t (周)的时间内发生地震的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1)设 T 表示直到下一次地震发生所需要的时间(单位:周)，求 T 的概率分布；

(2)求在相邻两周内至少发生 3 次地震的概率；

(3)求在连续 8 周无地震的情形下，在未来 8 周中仍无地震的概率.

装 订 线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

理学院 2016 级期中考试

考试科目：概率论与数理统计（2017 年 5 月 23 号）

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
评卷人						

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设事件概率满足 $P(A)=P(B)>0$，则（ C ）。

A. $A=B$　　B. $P(A|B)=1$

C. $P(A|B)=P(B|A)$　　D. $P(A|B)+P(B|A)=1$

2.下列函数中，可以作随机变量的分布函数的是（ C ）。

A. $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　　B. $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$

C. $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{1+x} & x\ge 0\end{cases}$　　D. $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan x+1$

3.设相互独立的两随机变量 X,Y 分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为（ C ）。

A. $F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$　　B. $F_Z(z)=\max\{F_X(z)|F_Y(z)\}$

C. $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$　　D. 都不是

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\sigma,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{0<X<2\sigma\}$（ C ）。

A. 单调增大　　B. 单调减少

C. 保持不变　　D. 增减不定

5. 设 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，则 X 和 Y 为随机变量（ C ）。

A.独立同分布　　B.独立不同分布

C.不独立同分布　　D.不独立也不同分布

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设事件 A,B,C 两两独立，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，$P(C)=0.6$，$P(A\cup B\cup C)=0.86$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=$ __0.9__。

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1/3 & 0\le x\le 1\\ 2/9 & 3\le x\le 6\\ 0 & 其他\end{cases}$，若使得 $P(X\ge k)=\dfrac{2}{3}$，则 k 的范围是 __$1\le k\le 3$__。

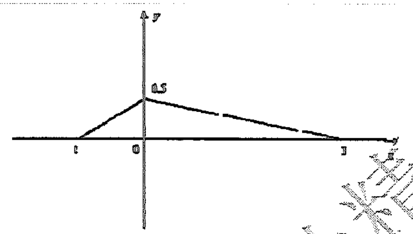
3. 设 X 与 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\dfrac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$ __$\dfrac{5}{7}$__。

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，现对 X 进行四次独立重复观察，用 Y 表示观察值不大于 0.5 的次数，则 $EY^2=$ __$\dfrac{7}{4}$__。

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，且 $P\{X>\dfrac{1}{2}\}=\dfrac{5}{8}$，则 $P\{\dfrac{1}{4}<X\le\dfrac{1}{2}\}=$ __$\dfrac{7}{32}$__。

三、计算 1（每小题 8 分，共 40 分）

1. 下图中的折线表示连续性随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 的图形：



（1）试确定 t 的值；（2）写出 X 的密度函数；（3）求出 X 的分布函数 $F(x)$；

（4）求 $P\{-2 \le X < 1\}$。

解答：（1）由密度函数的性质知，$f(x)$ 与 x 轴围成的面积等于 1，于是有

$\frac{1}{2}\times|t|\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{2}=1$，得出 $t=-1$。

（2）两点 $(-1,0)$ 和 $(0,\frac{1}{2})$ 所在的直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$；

两点 $(3,0)$ 和 $(0,\frac{1}{2})$ 所在的直线方程为 $y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$；

因此密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2} & -1\le x<0\\ \frac{3-x}{6} & 0\le x<3\\ 0 & 其他\end{cases}$。

（3）当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

当 $-1\le x<0$ 时，

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1}0dt+\int_{-1}^{x}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$；

当 $0\le x<3$ 时，

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt+\int_{0}^{x}\left(-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$；

当 $x\ge3$ 时，$F(x)=1$；

因此，

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4} & -1\le x<0\\ -\frac{x^2}{12}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4} & 0\le x<3\\ 1 & x\ge3\end{cases}。$$

（4）$P\{-2\le X<1\}=\int_{-2}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{2}{3}$。

或者用 $F(x)$ 求，即有 $P(-2\le X<1)=P(-2<X\le1)=F(1)-F(-2)=\frac{2}{3}$。

2. 已知随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

，且 $P(X\ge2)=\frac{3}{4}$，求未知参数 θ 及 X 的分布函数 $F(x)$。

解答：由 $P(X\ge2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{4}$，求得 $\theta=\pm\frac{1}{2}$，又

$P(X=2)=2\theta(1-\theta)\ge0$，故取 $\theta=\frac{1}{2}$。从而 X 的分布函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0,x<1\\ \frac{1}{4},1\le x<2\\ \frac{3}{4},2\le x<3\\ 1,x\ge3\end{cases}。$$

3. 设 A,B 两事件 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(B|A)=\frac{1}{2}$，令 $X=\begin{cases}1 & A发生\\ 0 & A不发生\end{cases}$，

$Y=\begin{cases}1 & B发生\\ 0 & B不发生\end{cases}$，求（1）$(X,Y)$ 的联合分布律，（2）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布。

解答：（1）$P(B)=\frac{1}{6}$，$P(AB)=\frac{1}{12}$，因此

班级：______ 学号：______ 姓名：______

装 订 线

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

（2）Z 可能取值为 0,1,2，因此

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

4. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$，求：

（1）A；（2）$F(X,Y)$；（3）$P\{0\le X<1,0\le Y<2\}$；（4）$f_{X|Y}(x\mid y)$。

解答：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A}{12}=1$，得 A=12，

（2） 由定义，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 12e^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}) & y>0,x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（3） $P\{0\le X<1,0\le Y<2\}=P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}$

$$=\int_0^1\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-e^{-3})(1-e^{-8})\approx 0.9499。$$

（4） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}4e^{-4y}, y>0\\ 0,其它\end{cases}$ 因此 $f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}3e^{-3x}, x>0\\ 0,其它\end{cases}$。

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8]\\ 0, & 其他\end{cases}$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，

求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数。

解答：易见，当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x\ge 8$ 时，$F(x)=1$；

对于 $x\in[1,8]$，有 $F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1$。

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数，显然，当 $y\le 0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\ge 1$ 时，$G(y)=1$。对于 $y\in(0,1)$，有

$$G(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=P(\sqrt[3]{X}-1\le y)=P(X\le(y+1)^3)=F((y+1)^3)=y；$$

于是，$Y=F(X)$ 的分布函数为 $G(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ y & 0<y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$。

四、计算 2（每小题 12 分，共 24 分）

1. 已知某批建筑材料的强度 X 服从 $N(200,18^2)$，现从中任取一件，求：

（1）这件材料的强度不低于 180 的概率

（2）如果所用的材料要求以 99%的概率保证强度不低于 150，问这批材料是否符　合这个要求。

x	1.10	1.11	1.21	1.61	2.70	2.71	2.76	2.78
$\Phi(x)$	0.8643	0.8665	0.8869	0.9463	0.9965	0.9966	0.9971	0.9973

解答：（1） $P(X\ge 180)=1-P(X<180)=1-\Phi\left(\frac{180-200}{18}\right)=\Phi(1.11)=0.8665$

（2）

$$P(X\ge 150)=1-P(X<150)=1-\Phi\left(\frac{150-200}{18}\right)=1-\Phi(-2.78)=\Phi(2.78)=0.9973$$

即从这批材料中任取一件，以概率 99.73%（大于 99%）保证强度不低于 150，故这批材料符合所提出的要求。

2. 设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从 [0,1] 上的均匀分布，Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，求 $Z=2X+Y$ 的概率密度。

解答：分布函数法：$F_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}+\frac{1}{2}e^{-z}-\frac{1}{2} & 0\le z<2\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1) & z\ge 2\\ 0 & z<0\end{cases}$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0\le z<2\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1) & z\ge 2\end{cases}$

五、证明题（6分）

设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明 $Y=1-e^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布。

证明：设 $F_Y(y)$ 是 Y 的分布函数，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}=P\{X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}f(x)dx$$

$$=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}2e^{-2x}dx$$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$.

于是，$Y=1-e^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布。

装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

2019年大学物理（上）期中考题

课程编号：0911006　　　　课程名称：大学物理

得分	评卷人

一、选择题（每小题1分，共20分）

1.一质点作直线运动，某时刻的瞬时速度 u=2m/s,瞬时加速度 $a=-2m/s^2$,则一秒钟后质点的速度( )

A.等于零　　B.等于 4 m/s　　C.等于 2 m/s　　D.不能确定

2.一运动质点在某瞬时位于矢径 r(x,y)的端点处,其速度大小为( )

A.$\frac{dr}{dt}$　　B.$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$　　C.$\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$　　D.$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$

3.某物体的运动规律为 $dV/dt=-kV^2t$,式中,k 为大于零的常量。当 t=0 时,初速度为 V_0, 则速度 V 与时间 t 的函数关系为( )。

A.$V=\frac{1}{2}kt^2+V_0$　　B.$V=-\frac{1}{2}kt^2+V_0$　　C. $\frac{1}{V}=\frac{1}{2}kt^2+\frac{1}{V_0}$　　D. $\frac{1}{V}=-\frac{1}{2}kt^2+\frac{1}{V_0}$

4.下列说法正确的是（ ）

A.加速度恒定不变时，物体运动方向也不变。

B.平均速率等于平均速度的大小。

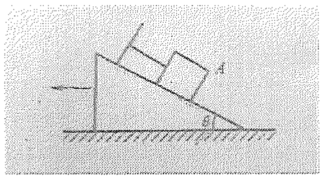
C.不管加速度如何，平均速率总可以写成 $V=(V_1+V_2)/2$ (其中，V_1、V_2分别为初、末速率)。

D. 运动物体速率不变时，速度可以变化。

5.如图所示，质量为 m 的物体 A 用平行于斜面的细线连接置于光滑的斜面上,若斜面向左方作加速运动.当物体始脱离斜面时，斜面的加速度的大小为( )。

A.$g\sin\theta$　　B.$g\cos\theta$

C.$g\cot\theta$　　D.$g\tan\theta$



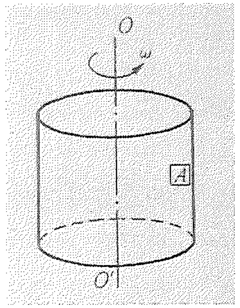
5 题图

6. 用一斜向上的力 F(与水平成 30°角),将一重为 G 的木块压靠在竖直壁面上,若不论用怎样大的力 F,都不能使木块向上滑动，则说明木块与壁面间的静摩擦系数μ的大小为( )

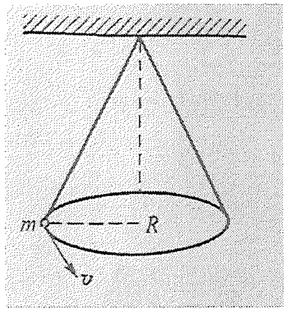
A.$\mu\geq\frac{1}{2}$　　B.$\mu\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$　　C.$\mu\geq\sqrt{3}$　　D.$\mu\geq2\sqrt{3}$

7. 如图所示,竖立的圆筒形转笼，半径为 R.绕中心轴 00 转动,物块 A 紧靠在圆筒的内壁上,物块与圆筒间的摩擦系数为μ,要使物块 A 不下落，圆筒转动的角速度 w 至少应为( )

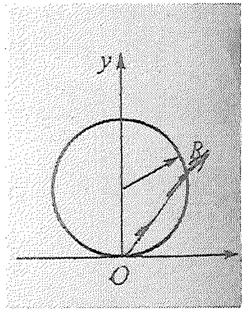
A. $\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$　　B. $\sqrt{\mu g}$　　C. $\sqrt{\frac{g}{\mu R}}$　　D. $\sqrt{\frac{g}{R}}$



7 题图



9 题图



10 题图

8.一小珠可在半径为 R 的竖直的圆环上无摩擦地滑动，且圆环能以其竖直直径为轴转动。当圆环以一适当的恒定角速度 w 转动，小珠偏离圆环转轴且相对圆环静止时，小珠所在处圆环半径偏离竖直方向的角度( )

A.$\theta=\frac{\Pi}{2}$　　B.$\theta=\arccos(\frac{g}{Rw^2})$　　C.$\theta=\arctan(\frac{Rw^2}{g})$　　D.由小珠质量决定

9.如图所示，圆锥摆的摆球质量为 m，速率为 v，圆半径为 R，当摆球在轨道上运动半周时，摆球所受的重力冲量大小为（ ）

A.2mv　　B.0　　C.ΠRmg/v　　D.$\sqrt{2mv^2+(\frac{mg\Pi R}{v})^2}$

10.一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动，有一力 $\mathbf{F}=F_0(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})$作用在质点上。在该质点从坐标原点运动到(0,2R)位置过程中,力 F 对它所做的功为( )

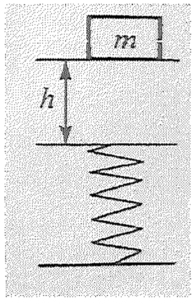
A.F_0R^2　　B.$2F_0R^2$　　C.$3F_0R^2$　　D.$4F_0R^2$

11.对功的概念有以下几种说法:
(1)保守力做正功时,系统内相应的势能增加;
(2)质点经一闭合路径运动时,保守力对质点做的功为零;
(3)作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所做功的代数和必为零。在上述说法中( )。

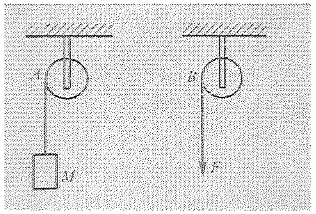
A.(1),(2)是正确的　　B.(2),(3)是正确的
C.只有(2)是正确的　　D.只有(3)是正确的

12.如图所示,一质量为 m 的物体,位于质量可以忽略的直立弹簧正上方高度为 h 处,该物体从静止开始落向弹簧，若弹簧的劲度系数为 k,不考虑空气阻力，则该物体下降过程中可能获得的最大动能为（）

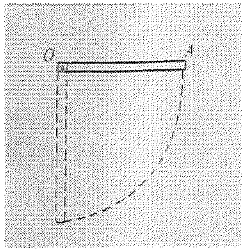
A. mgh　　B. $mgh-\frac{m^2g^2}{2k}$　　C. $mgh+\frac{m^2g^2}{2k}$　　D. $mgh+\frac{m^2g^2}{k}$



12 题图



13 题图



14 题图

13.如图所示，A，B 为两个相同的绕着轻绳的定滑轮，A 滑轮挂一质量为 M 的物体,B 滑轮受拉力 F,且 F=Mg，设 A,B 两滑轮的角加速度分别为β_A和β_B,不计滑轮轴的摩擦,则有( )。

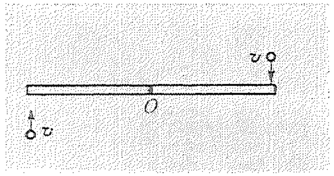
A.$\beta_A=\beta_B$　　B. $\beta_A>\beta_B$
C. $\beta_A<\beta_B$　　D.开始时，$\beta_A=\beta_B$，以后$\beta_A<\beta_B$

14. 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动,如图所示,现使棒从水平位置由静止开始自由下落,在棒摆动到竖直位置的过程中,下述说法哪一种是正确的? ( )

A.角速度从小到大,角加速度从大到小
B.角速度从小到大,角加速度从小到大
C.角速度从大到小,角加速度从大到小
D.角速度从大到小,角加速度从小到大

15. 光滑的水平桌面上有一长为 2L、质量为 m 的匀质细杆，可绕通过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动,其转动惯量为$\frac{1}{3}mL^2$,起初杆静止，桌面上有两个质量均为 m 的小球,各自在垂直于杆的方向上,正对着杆的一端,以相同速率 v 相向运动，如图所示,当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后,就与杆粘在一起转动,则这一系统碰撞后的转动角速度应为( )

A.$\frac{2v}{3L}$　　B. $\frac{4v}{5L}$　　C. $\frac{6v}{7L}$　　D. $\frac{8v}{9L}$



15 题图

16. 质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上.平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动,转动惯量为 J,平台和小孩开始时均静止。当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对于地面旋转的角速度和旋转方向分别为( )

A.$w=\frac{mR^2}{J}(\frac{v}{R})$,顺时针　　B.$w=\frac{mR^2}{J}(\frac{v}{R})$,逆时针
C.$w=\frac{mR^2}{J+mR^2}(\frac{v}{R})$, 顺时针　　D.$w=\frac{mR^2}{J+mR^2}(\frac{v}{R})$,逆时针

17.有一半径为 R 的水平圆转台,可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J,开始时转台以匀角速度 w_0 转动,此时有一质量为 m 的人站在转台中心,随后此人沿半径向外跑去,当他到达转台边缘时转台的角速度为( )

A.$\frac{J}{J+mR^2}w_0$　　B. $\frac{J}{(J+m)R^2}w_0$　　C. $\frac{J}{mR^2}w_0$　　D.w_0

18.一物体做简谐振动，振动方程为 $x=A\cos(wt+\frac{\pi}{4})$。在 t=T/4（T 为周期）时刻，物体的加速度为（）

A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}Aw^2$　　B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}Aw^2$　　C. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}Aw^2$　　D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}Aw^2$

19.一个质点做简谐振动，周期为 T，质点由平衡位置向 x 轴正方向运动时，由平衡位置到二分之一最大位移这段路程所需要的时间为（）

A.T/4　　B.T/6　　C.T/8　　D.T/12

20.已知两个简谐振动的振动曲线如图所示，两简谐振动的最大速率

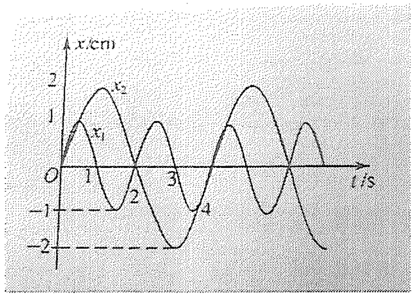
装　订　线

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

之比 $v_1:v_2$ 为（）

A.4:1　　B.2:1　　C.1:1　　D.1:2



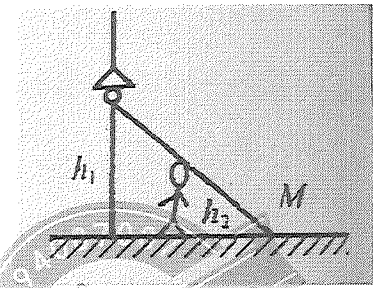
20 题图

二、

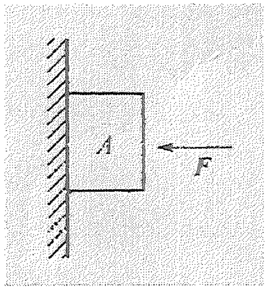
得分	评卷人

填空题（每小题1分，共10分）

1. 灯距地面高度为 h_1，一个人身高为 h_2，在灯下以匀速率 V 沿水平直线行走，如图所示，他的头顶在地上的影子 M 点沿地面移动的速 Vm =__________



1 题图



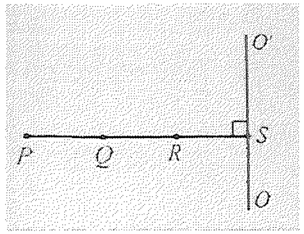
2 题图

2. 如图所示，沿水平方向的外力 F 将物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，此时物体保持静止，并设其所受静摩擦力为 f_0，若外力增至 2F，则此时物体所受静摩擦力为____________

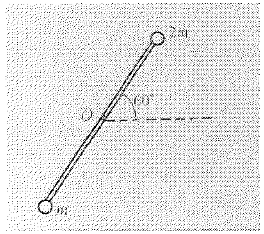
3. 有两个弹簧，质量忽略不计，原长都是 10cm，第一个弹簧上端固定，下挂一质量为 m 的物体后，长 11cm。而第二个弹簧上端固定，下挂一质量为 m 的物体后，长 13cm。现将两弹簧串连，上端固定，下面仍挂一质量为 m 的物体，则两弹簧的总长为____________

4. 哈雷彗星绕太阳运动的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆。它与太阳最近的距离 $r_1=8.75\times10^{10}$m，此时它的速率 $v_1=5.46\times10^4$m/s，它与太阳最远时的速率 $v_2=9.08\times10^2$，这时它与太阳的距离 r_2=________

5. 如图所示，P，Q，R 和 S 是附于刚性轻质细杆上的质量分别 4m，3m，2m 和 m 的四个质点，PQ=QR=RS=L，则系统对 OO' 轴的转动惯量为____________



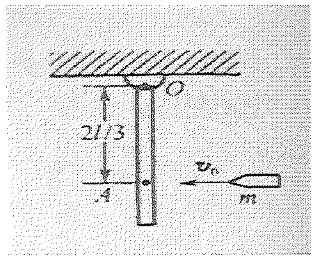
5 题图



6 题图

6. 如图所示，长为 L 的轻质细杆，两端分别固定质量为 m 和 2m 的小球，此系统在竖直平面内可绕过中点 O 且与杆垂直的水平光滑固定轴（O 轴）转动。开始时杆与水平成 60°角，处于静止状态。无初转速地释放以后，杆球这一刚体系统绕 O 轴转动。释放后，当杆转到水平位置时，角加速度 β=__________

7. 长为 L 质量为 M 的匀质杆可绕通过杆一端 O 的水平光滑固定轴转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$，开始时杆竖直下垂，如图所示。有一质量为 m 的子弹以水平速度 V_0 射入杆上 A 点，并嵌在杆中，OA=2L/3，则子弹射入后瞬间杆的角速度 w=__________



8. 一转台绕竖直固定光滑轴转动，每 10s 转一周，转台对轴的转动惯量为 1200kg·m²。质量为 80kg 的人，开始时站在台的中心，随后沿半径向外跑去，问当人离转台中心 2 m 时，转台的角速度为__________

9.一弹簧振子,重物的质量为 m，弹簧的劲度系数为 k,该振子作振幅为 A 的简谐振动。当重物通过平衡位置且向规定的正方向运动时，开始计时，则其振动方程为________________（位移用 X 表示）

10.一个质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，表达式分别为：

$X_1=4\times10^{-2}\cos(2t+\frac{\pi}{6})$ （SI）， $X_2=3\times10^{-2}\cos(2t-\frac{5\pi}{6})$ （SI）

则其合成振动的初相位为__________

装 订 线

2019 大物期中答案

选择题

DDCDC BCBCB CCCAC AABBC

填空题

1. h_1V/h_1-h_2

2. f_0

3. 24cm

4. 5.26×10^{12}m

5. $50mL^2$

6. $\frac{2g}{3L}$

7. $\frac{6V_0}{\left(4+\frac{3M}{m}\right)L}$

8. 0.496rad/s

9. $X=A\cos(\sqrt{k/mt}-\frac{\Pi}{2})$

10. $\frac{\Pi}{6}$

2018年大物期中考题

一、选择题：（每题 3 分，共 60 分）

注意：每题中只有一个正确答案，请把正确答案涂在答题卡上面，否则记为零分。

1．一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$（其中 a、b 为常量），则该质点作

A．匀速直线运动　　　　B．变速直线运动

C．抛物线运动　　　　D．一般曲线运动

2．一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x = 3t^2 - 2t^3$(SI)，当质点的加速度为零时，其速度的大小为

A．0.5m/s　　B．1m/s　　C．1.5m/s　　D．2m/s

3．一质点沿半径 R 作圆周运动。其路程 s 随时间的变化规律为 $s = bt - \dfrac{c}{2}t^2$，其中 b,c 是常数。则在切向加速度与法向加速度大小相等以前所经历的时间是

A．$\dfrac{b}{c} + \sqrt{\dfrac{R}{c}}$　　B．$\dfrac{b}{c} - \sqrt{\dfrac{R}{c}}$　　C．$\dfrac{b}{c} + cR^2$　　D．$\dfrac{b}{c} - cR^2$

~~两个答案~~

4．下列说法正确的是

A．加速度恒定不变时，物体运动方向也不变。

B．平均速率等于平均速度的大小。

C．不管加速度如何，平均速率总可以写成 $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$（其中，v_1、v_2 分别为初、末速率）。

D．运动物体速率不变时，速度可以变化。

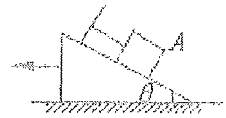
5．如第 2 页（5 题图）所示，质量为 m 的物体 A 用平行于斜面的细线连结置于光滑的斜面上，若斜面向左方作加速运动，当物体开始脱离斜面时，它的加速度的大小为

A．$g\sin\theta$　　B．$g\cos\theta$　　C．$g\mathrm{ctg}\theta$　　D．$g\mathrm{tg}\theta$

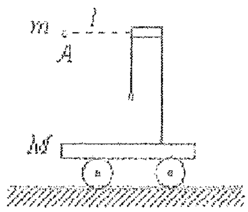
6．一船浮于静水中，船长 L，质量为 m，一个质量也为 m 的人从船尾走到船头，

不计水和空气的阻力，则在此过程中船将

A．不动　　B．后退 L　　C．后退 $\frac{1}{2}L$　　D．后退 $\frac{1}{3}L$



（5 题图）



（7 题图）

7．如（7 题图）所示，静止在光滑水平面上的一质量为 M 的车上悬挂一单摆，摆球质量为 m，摆线长为 l。开始时，摆线水平，摆球静止于 A 点，突然放手，当摆球运动到摆线呈竖直位置的瞬间，摆球相对于地面的速度为

A．0　　B．$\sqrt{2gl}$　　C．$\sqrt{\dfrac{2gl}{1+m/M}}$　　D．$\sqrt{\dfrac{2gl}{1+M/m}}$

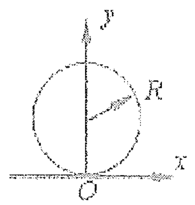
8．小球 A 和 B 的质量相同，B 球原来静止，A 以速度 u 与 B 作对心碰撞。这两球碰撞后的速度 v_1 和 v_2 的各种可能值中有

A．u，$2u$　　B．$u/4$，$3u/4$

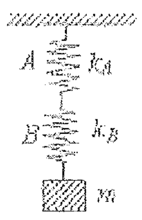
C．$-u/4$，$5u/4$　　D．$\frac{1}{2}u$，$-u\sqrt{3}/2$

9．一质点在如（9 题图）所示的坐标平面内作圆周运动，有一力 $\vec{F}=F_0(x\vec{i}+y\vec{j})$ 作用在质点上。在该质点从坐标原点运动到(0，$2R$）位置过程中，力 $\vec{F}$ 对它所作的功为

A．F_0R^2　　B．$2F_0R^2$　　C．$3F_0R^2$　　D．$4F_0R^2$



（9 题图）



（10 题图）

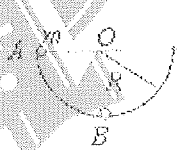
10．如（10 题图）所示，A、B 二弹簧的劲度系数分别为 k_A 和 k_B，其质量均忽略不计．今将二弹簧连接起来并竖直悬挂。当系统静止时，二弹簧的弹性势能 E_{PA} 与 E_{PB} 之比为

A. $\dfrac{E_{PA}}{E_{PB}}=\dfrac{k_A}{k_B}$ B. $\dfrac{E_{PA}}{E_{PB}}=\dfrac{k_A^2}{k_B^2}$ C. $\dfrac{E_{PA}}{E_{PB}}=\dfrac{k_B}{k_A}$ D. $\dfrac{E_{PA}}{E_{PB}}=\dfrac{k_B^2}{k_A^2}$

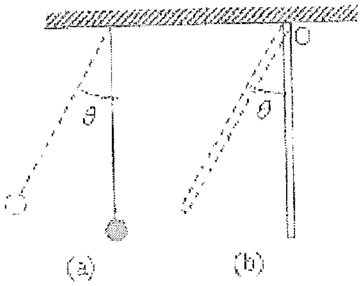
11．如（11 题图）所示，一质量为 m 的质点，在半径为 R 的半球形容器中，由静止开始自边缘上的 A 点滑下，到达最低点 B 时，它对容器的正压力为 N。则质点自 A 滑到 B 的过程中，摩擦力对其作的功为

A. $\frac{1}{2}R(N-3mg)$ B. $\frac{1}{2}R(3mg-N)$

C. $\frac{1}{2}R(N-mg)$ D. $\frac{1}{2}R(N-2mg)$



（11 题图）



（14 题图）

12．关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是

A．只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关。

B．取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关。

C．取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置。

D．只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关。

13． 一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 J，绳下端挂一物体。物体所受重力为 P，滑轮的角加速度为 β。若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子，滑轮的角加速度 β 将

A．不变 B．变小

C．变大 D．如何变化无法判断

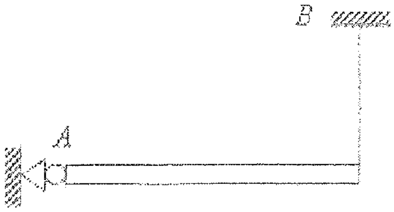
14．如（14 题图）所示，图（a）为一绳长为 l、质量为 m 的单摆。图（b）为一长度为 l、质量为 m 能绕水平轴 O 自由转动的匀质细棒。现将单摆和细棒同时从与铅直线成 θ 角度的位置由静止释放,若运动到竖直位置时，单摆、细棒的角速度分别用 ω_1、ω_2 表示，则

A．$\omega_1=\omega_2/2$ B．$\omega_1=\omega_2$ C．$\omega_1=2\omega_2/3$ D．$\omega_1=\sqrt{2/3}\,\omega_2$

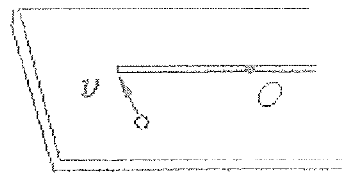
15．如第 4 页（15 题图）所示，一长为 l 的匀质细杆，其左端与墙用铰链 A 连接，

右端用一铅直细绳 B 悬挂，杆处于水平静止状态。当细绳 B 被突然烧断时，杆右端的加速度大小为

A. $g/2$　　B. g　　C. $g/3$　　D. $3g/2$



（15 题图）



（16 题图）

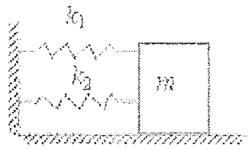
16. 光滑的水平桌面上有长为 $2l$、质量为 m 的匀质细杆，可绕通过其中点 O 且垂直于桌面的竖直固定轴自由转动，起初杆静止。有一质量为 m 的小球在桌面上正对着杆的一端，在垂直于杆长的方向上，以速率 v 运动，如（16 题图）所示。当小球与杆端发生碰撞后，就与杆粘在一起随杆转动。则这一系统碰撞后的转动角速度是

A. $\dfrac{lv}{12}$　　B. $\dfrac{2v}{3l}$　　C. $\dfrac{3v}{4l}$　　D. $\dfrac{3v}{l}$

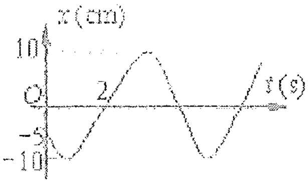
17. 如（17 题图）所示，质量为 m 的物体由劲度系数为 k_1 和 k_2 的两个轻弹簧连接在光滑水平面上作微小振动，则该系统的振动频率为

A. $\nu = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$　　B. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$

C. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{mk_1k_2}}$　　D. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$



（17 题图）



（18 题图）

18. 一简谐振动的振动曲线如（18 题图）所示。则其初位相应为

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $-\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $-\dfrac{2\pi}{3}$

19. 一质点作简谐振动，周期为 T。质点由平衡位置向 x 轴正方向运动时，由平衡位置到二分之一最大位移这段路程所需要的时间为

A. $T/4$　　B. $T/6$　　C. $T/8$　　D. $T/12$

20．一弹簧振子作简谐振动，当其偏离平衡位置的位移的大小为振幅的 1/4 时，其动能为振动总能量的

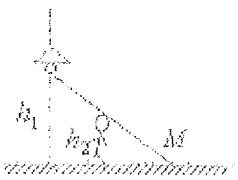
A．7/16　　B．9/16　　C．11/16　　D．15/16

二、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

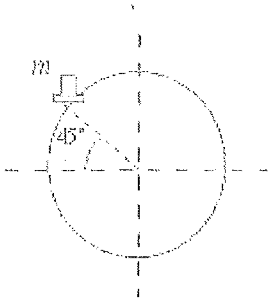
注意：把每题中的正确答案填在答题卡上面，否则记为零分。

21．一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为 $a = 3-2t$（SI），如果初始时质点的速度 v_0 为 5 m/s，则当 t 为 3s 时，质点的速度 v =____________ m/s。

22．如（22 题图）所示，灯距地面高度为 h_1，一个人身高为 h_2，在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走。他的头顶在地上的影子 M 点沿地面移动的速度为 v_M =______。



（22 题图）



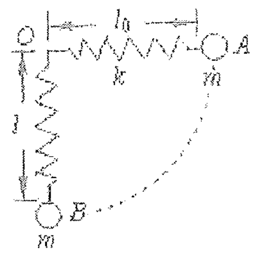
（23 题图）

23．一块水平木板上放一砝码，砝码的质量 m=0.2kg，手扶木板使其始终保持水平，托着砝码使之在竖直平面内做半径 R=0.5m 的匀速率圆周运动，速率 v =1m/s。当砝码与木板一起运动到（23 题图）图示位置时，砝码受到木板对其产生的支持力为__________N。(g=9.8m/s^2)

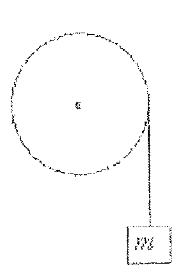
24．二质点的质量各为 m_1、m_2，当它们之间的距离由 a 缩短到 b 时，它们之间万有引力所做的功为______________。

25．如第 6 页（25 题图）所示，质量为 m 的小球系在劲度系数为 k 的轻弹簧一端，弹簧的另一端固定在 O 点。开始时弹簧在水平位置 A，处于自然状态，原长为 l_0。小球由位置 A 释放，下落到 O 点正下方位置 B 时，弹簧的长度为 l，则小球到达

B 点时的速度大小为________________。

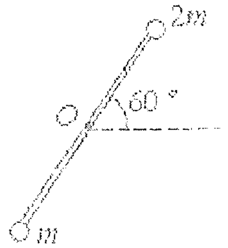


（25 题图）

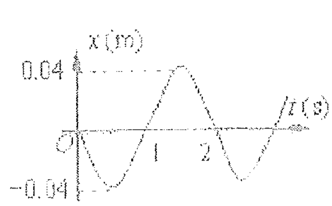


（26 题图）

26. 如（26 题图）所示，半径为 R，具有光滑轴的定滑轮边缘绕一细绳，绳的下端挂一质量为 m 的物体。绳的质量可以忽略，绳与定滑轮之间无相对滑动。若物体下落的加速度为 a，则定滑轮对轴的转动惯量 $J=$________________。



（27 题图）



（29 题图）

27. 如（27 题图）所示，一长为 L 的轻质细杆，两端分别固定质量为 m 和 $2m$ 的小球，此系统可在竖直平面内绕过细杆中点 O 且与纸面垂直的水平光滑固定轴转动。开始时杆与水平面成 $60°$ 角，处于静止状态。无初转速地释放以后，杆球这一刚体系统绕 O 轴转动。释放后，当杆转到水平位置时，杆球这一刚体系统的角加速度 β =__________。

28. 一人站在旋转平台的中央，两臂侧平举，整个系统以 2π rad/s 的角速度旋转，转动惯量为 6 kgm^2。如果将双臂收回则系统的转动惯量变为 2 kgm^2。此时系统的转动动能与原来的转动动能之比 E_k / E_{k0} 为 ______________。

29. 一简谐振子的振动曲线如（29 题图）所示，则以余弦函数表示的振动方程为________________ m。

30. 一个质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，其表达式分别为

$$x_1 = 4\times10^{-2}\cos(2t+\frac{1}{6}\pi)\ \text{(SI)},\qquad x_2 = 3\times10^{-2}\cos(2t-\frac{5}{6}\pi)\ \text{(SI)}。$$

则其合成振动的初相位为________________。

答案：

1. B	2. C	3. A 或 B	4. D	5. C	6. C	7. C
8. B	9. B	10. C	11. A	12. C	13. C	14. D
15. D	16. C	17. B	18. C	19. B	20. D	

21. $23m\cdot s^{-1}$

22. $\dfrac{h_1}{h_1-h_2}v$

23. 1.68

24. $-Gm_1m_2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

25. $\sqrt{2gl-\dfrac{k}{m}(l-l_0)^2}$

26. $\dfrac{m(g-a)R^2}{a}$

27. $\dfrac{2g}{3L}$

28. 3

29. $0.04\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

30. $\dfrac{\pi}{6}$

2017年大物上期中考试

一、选择题：（每题 3 分，共 60 分）

注意：每题中只有一个正确答案，请把正确的答案填在答题卡上面，否则记为零分。

1．一小球沿斜面向上运动，其运动方程为：$x=5+4t-t^2$（SI），则小球运动到最高点的时刻是

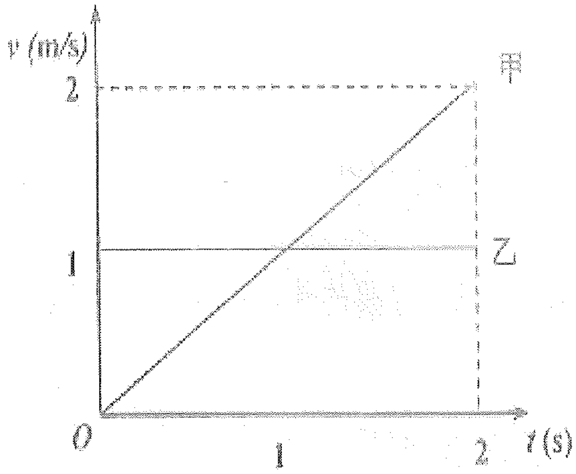
A．8s　　B．5s　　C．4s　　D．2s

2．质点沿 x 轴正方向运动，其加速度随位置的变化关系为 $a=\frac{1}{3}+3x^2$。如果在 $x=0$ 处，速度 $v_0=5\,\text{m/s}$，那么在 $x=3\,\text{m}$ 处的速度为

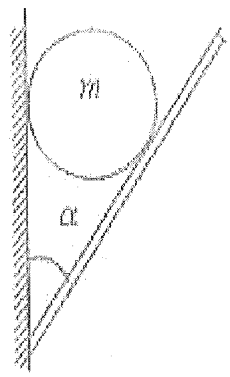
A．9m/s　　B．8m/s　　C．7.8m/s　　D．7.2m/s

3．甲、乙两人从同一地点同时沿同一方向直线行走，他们的 $v-t$ 图如（3 题图）所示，则他们出发后相遇的时刻是

A．1s　　B．2s　　C．4s　　D．不能相遇



（3 题图）



（5 题图）

4．质点由静止开始以匀角加速度 β 沿半径为 R 的圆周运动。如果在某一时刻此质点的总加速度 $\vec{a}$ 与切向加速度 $\vec{a}_t$ 成 45° 角，则此时刻质点已转过的角度 θ 为

A．$\frac{1}{6}$ rad　　B．$\frac{1}{4}$ rad　　C．$\frac{1}{3}$ rad　　D．$\frac{1}{2}$ rad

5．如（5 题图）所示，质量为 m 的小球，放在光滑的木板和光滑的墙壁之间，并保

持平衡．设木板和墙壁之间的夹角为α，当 α 逐渐增大时，小球对木板的压力将

A．增加　　　　　　　　　B．减少

C．不变　　　　　　　　　D．先是增加，后又减小，压力增减的分界角为$\alpha=45°$

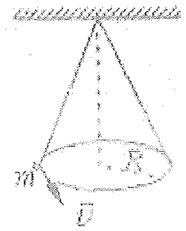
6．一小珠可在半径为 R 竖直的圆环上无摩擦地滑动，且圆环能以其竖直直径为轴转动。当圆环以一适当的恒定角速度 ω 转动，小珠偏离圆环转轴而且相对圆环静止时，小珠所在处圆环半径偏离竖直方向的角度为

A．$\theta=\frac{1}{2}\pi$　　　　　　　B．$\theta=\arccos(\frac{g}{R\omega^2})$

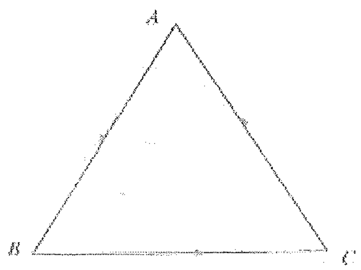
C．$\theta=\mathrm{arctg}(\frac{R\omega^2}{g})$　　　　D．需由小珠的质量 m 决定

7．如（7题图）所示，圆锥摆的摆球质量为 m，速率为 v，圆半径为 R，当摆球在轨道上运动半周时，摆球所受重力冲量的大小为

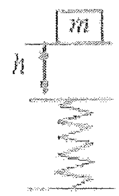
A．$2mv$　　B．$\sqrt{(2mv)^2+(mg\pi R/v)^2}$　　C．$\pi Rmg/v$　　D．0



（7题图）



（8题图）



（10题图）

8．质量为 m 的质点，以恒定速率 v 沿如（8题图）所示的正三角形 $ABCA$ 的方向运动一周，作用于 A 处质点的冲量大小和方向是

A．$I=2mv$，水平向右　　　　B．$I=2mv$，水平向左

C．$I=\sqrt{3}mv$，垂直向下　　　D．$I=\sqrt{3}mv$，垂直向上

9．质量为 $m=0.5$ kg的质点，在 Oxy 坐标平面内运动，其运动方程为 $x=5t$，$y=0.5t^2$（SI），从 $t=2$s 到 $t=4$s 这段时间内，合外力对质点作的功为

A．1.5 J　　B．3 J　　C．4.5 J　　D．−1.5 J

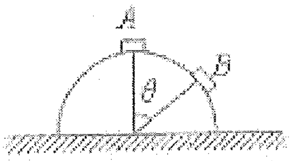
10．如（10题图）所示，一质量为 m 的物体，位于质量可以忽略的直立弹簧正上方高度为 h 处，该物体从静止开始落向弹簧，若弹簧的劲度系数为 k，不考虑空气阻力，则物体下降过程中可能获得的最大动能是

A. mgh B. $mgh-\frac{m^2g^2}{2k}$ C. $mgh+\frac{m^2g^2}{2k}$ D. $mgh+\frac{m^2g^2}{k}$

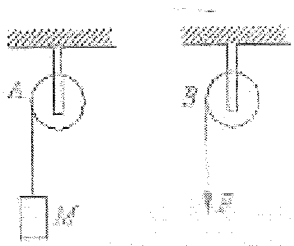
11. 质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处(球面固定不动)，如（11 题图）所示。当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为

A. $a=2g(1-\cos\theta)$ B. $a=g\sin\theta$

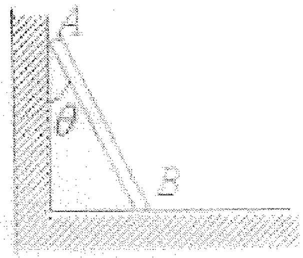
C. $a=g$ D. $a=\sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2+g^2\sin^2\theta}$



（11 题图）



（13 题图）



（14 题图）

12. 有两个半径相同，质量相等的细圆环 A 和 B. A 环的质量分布均匀，B 环的质量分布不均匀. 它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B，则

$J_A = J_B$

A. $J_A>J_B$ B. $J_A<J_B$ C. ~~$J_A=J_B$~~ D. 不能确定 J_A、J_B 哪个大

13. 如（13 题图）所示，A、B 为两个相同的绕着轻绳的定滑轮. A 滑轮挂一质量为 M 的物体，B 滑轮受拉力 F，而且 $F=Mg$. 设 A、B 两滑轮的角加速度分别为 β_A 和 β_B，不计滑轮轴的摩擦，则有

A. $\beta_A=\beta_B$ B. $\beta_A>\beta_B$

C. $\beta_A<\beta_B$ D. 开始时 $\beta_A=\beta_B$，以后 $\beta_A<\beta_B$

14. 如（14 题图）所示，一质量为 m 的匀质细杆 AB，A 端靠在光滑的竖直墙壁上，B 端置于粗糙水平地面上而静止. 杆身与竖直方向成 θ 角，则 A 端对墙壁的压力大小

A. 为 $\frac{1}{4}mg\cos\theta$ B. 为 $\frac{1}{2}mg\mathrm{tg}\theta$ C. 为 $mg\sin\theta$ D. 不能唯一确定

15. 已知地球的质量为 m，太阳的质量为 M，地心与日心的距离为 R，万有引力常量为 G，则地球绕太阳做圆周运动的轨道角动量为

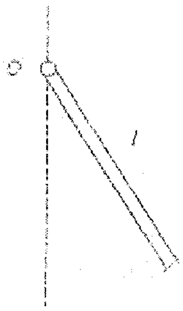
A. $m\sqrt{GMR}$ B. $\sqrt{\frac{GmM}{R}}$ C. $mM\sqrt{\frac{G}{R}}$ D. $\sqrt{\frac{GmM}{2R}}$

16. 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J，开始时转台以匀角速度 ω_0 转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心．随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为

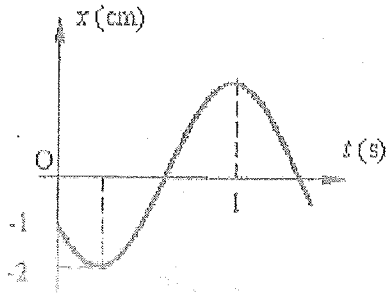
A．$\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$　　B．$\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$　　C．$\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$　　D．ω_0

17．如（17 题图）所示，一长为 l 的均匀细棒悬于通过其一端的光滑水平固定轴上，作成一复摆。已知细棒绕通过其一端的轴的转动惯量 $J=\dfrac{1}{3}ml^2$，此摆作微小振动的周期为

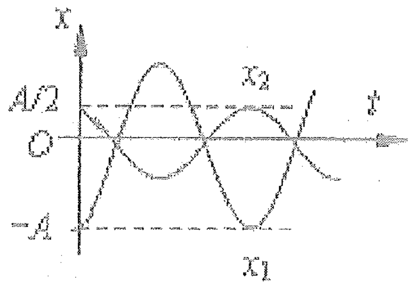
A．$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$　　B．$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$　　C．$2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$　　D．$\pi\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$



（17 题图）



（19 题图）



（20 题图）

18．一物体作简谐振动，振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\dfrac{1}{4}\pi)$。在 $t=T/4$（T 为周期）时刻，物体的加速度为

A．$-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$　　B．$\dfrac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$　　C．$-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$　　D．$\dfrac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$

19．已知某简谐振动的振动曲线如（19 题图）所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。则此简谐振动的振动方程为

A．$x=2\cos(\dfrac{2}{3}\pi t+\dfrac{2}{3}\pi)$　　B．$x=2\cos(\dfrac{2}{3}\pi t-\dfrac{2}{3}\pi)$

C．$x=2\cos(\dfrac{4}{3}\pi t+\dfrac{2}{3}\pi)$　　D．$x=2\cos(\dfrac{4}{3}\pi t-\dfrac{2}{3}\pi)$

20．（20 题图）中所画的是两个简谐振动的振动曲线。若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为

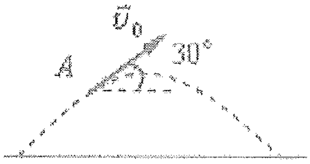
A．$\dfrac{3}{2}\pi$　　B．π　　C．$\dfrac{1}{2}\pi$　　D．0

二、填空题：（每题3分，共30分）

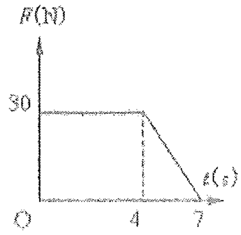
注意：把每题中的正确答案填在答题卡上面，否则记为零分。

1．一质点作平面运动，其运动方程为$\vec{r}=5t\vec{i}+\left(12-5t^2\right)\vec{j}$，则该质点的轨迹方程为____________。

2．一物体作如（2题图）所示的斜抛运动，测得在轨道A点处速度为$\vec{v}_0$，其方向与水平方向夹角成30°。则物体在A点的曲率半径ρ=____________.



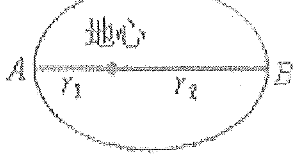
（2题图）



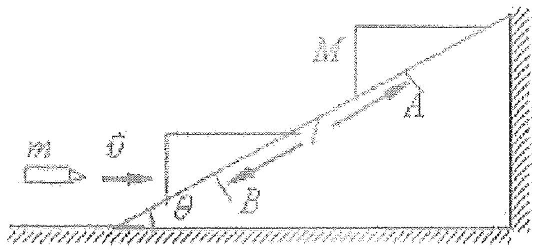
（3题图）

3．质量m=10kg的木箱放在地面上，在水平拉力F的作用下由静止开始沿直线运动，其拉力随时间的变化关系，如（3题图）所示。若已知木箱与地面间的摩擦系数μ=0.2，在t = 7s时，木箱的速度大小为____________ m/s （g取10 m/s^2）

4．如（4题图）所示，一人造地球卫星绕地球作椭圆运动，近地点为A，远地点为B。A、B两点距地心分别为r_1、r_2。设卫星质量为m，地球质量为M，万有引力常量为G。则卫星在A、B两点的动能之差$E_{KB}-E_{KA}==$____________.



（4题图）

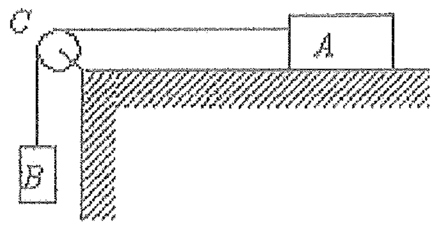


（5题图）

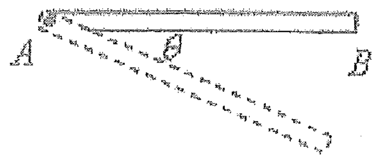
5．如（5题图）所示，质量为M的木块在光滑的固定斜面上，由A点从静止开始下滑，当经过路程l运动到B点时，木块被一颗水平飞来的子弹射中，子弹立即陷入木块内。设子弹的质量为m，速度为$\vec{v}$，求子弹射中木块后，子弹与木块的共同速度V=____________ . （斜面的倾角为θ）

6．如下页（6题图）所示，滑块A、重物B和滑轮C的质量分别为m_A、m_B和m_C，滑轮的半径为R，滑轮对轴的转动惯量$J=m_CR^2/2$．滑块A与桌面间、滑轮与轴

承之间均无摩擦，绳的质量可不计，绳与滑轮之间无相对滑动．滑块 A 的加速度 a=____________ ．



（6 题图）



（8 题图）

7．一水平的匀质圆盘，可绕通过盘心的竖直光滑固定轴自由转动．圆盘质量为 M，半径为 R，对轴的转动惯量 $J=MR^2/2$．当圆盘以角速度 ω_0 转动时，有一质量为 m 的子弹沿盘的直径方向射入而嵌在盘的边缘上．子弹射入后，圆盘的角速度 ω == ________________ ．

8．如（8 题图）所示，一匀质细杆 AB,长为 l,质量为 m. A 端挂在一光滑的固定水平轴上, 细杆可以在竖直平面内自由摆动。杆从水平位置由静止释放开始下摆,当下摆 θ 时,杆的角速度 ω= _____________。

9．一质点在 x 轴上作简谐振动，振辐 $A=4$ cm，周期 $T=2$ s，其平衡位置取作坐标原点。若 $t=0$ 时刻质点第一次通过 $x=-2$ cm 处，且向 x 轴负方向运动，则质点第二次通过 $x=-2$ cm 处的时刻 t=________________ s．

10．一作简谐振动的振动系统，振子质量为 2 kg，系统振动频率为 1000 Hz，振幅为 0.5 cm，则其振动能量 E=________________ J．

选择题

1.	D	2.	A	3.	B	4.	D	5.	B	6.	B	7.	C
8.	C	9.	B	10.	C	11.	D	12.	C	13.	C	14.	B
15.	A	16.	A	17.	C	18.	B	19.	C	20.	B		

填空题

1. $y=12-\dfrac{x^2}{5}$

2. $\rho=\dfrac{v^2}{g\cos 30^\circ}$

3. $2.5m/s$

4. $GmM\dfrac{r_1-r_2}{r_1r_2}$

5. $\dfrac{mv\cos\theta+M\sqrt{2gl\sin\theta}}{M+m}$

6. $\dfrac{2m_Bg}{2(m_A+m_B)+m_C}$

7. $\dfrac{M\omega_0}{M+2m}$

8. $\sqrt{\dfrac{3g\sin\theta}{l}}$

9. $\dfrac{2}{3}s$

10. 9.9×10^2 J

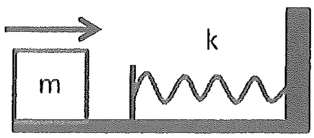
2015年大物期中考试

1．质点沿半径为 R 做圆周运动，运动学方程为$\Theta=3+2t^2$（SI），则 t 时刻质点的法向加速度大小为a_n=______，角加速度β=__________。 $16Rt^2$，$4rad/s^2$

2.一质点沿 X 轴运动，其加速度为 a=4t（SI），已知 t=0 时，质点位于X_0=10m 处，初速度v_0=0，则位置和时间的关系式为______________。 $x=2t^3/3+10$

3.一长为 L，质量均匀的链条，放在光滑的水平桌面上，若使其长度的 L/2 悬挂于桌边下，然后由静止释放，任其滑动，则它全部离开桌面时的速率为______。
$\frac{\sqrt{3gL}}{2}$

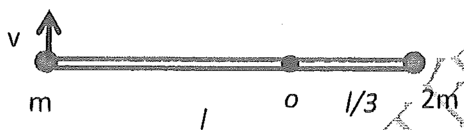
4.如图质量为 0.1kg 的木块，在一个水平面上和一个劲度系数为 20N/m 的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了 0.4m，木块与水平面间的滑动摩擦系数为 0.25，则将发生碰撞时木块的速率为 ______。 5.83m/s



5．一吊车底板上放一质量为 10kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 a=3+5t(SI),则 2 秒内吊车底板给物体的冲量大小为______;2 秒内物体动量的增量大小为________；（$g=9.8m/s^2$） 356N/S，160N/S

6. 两个质量都为 100kg 的人，站在一质量为 200kg、半径为 3m 的水平转台的直径两端。转台的固定竖直转轴通过其中心且垂直于台面。初始时，转台每 5s 转一圈。当这两人以相同的快慢走到转台的中心时，转台的角速度为______。(已知转台对转轴的转动惯量 $J=\frac{1}{2}MR^2$，忽略转台在转轴处的摩擦)。3.77 rad/s

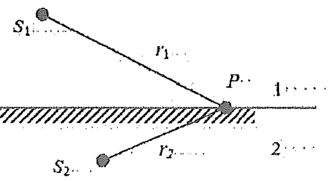
7.如图质量分别为 m 和 2m 的两物体（视为质点）用一长为 l 的轻质刚性细杆相连，系统绕通过杆且与杆垂直的竖直固定轴 o 转动，已知 o 轴离质量为 2m 的质点的距离为 $l/3$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量大小为___________。 mvl



8.一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的一半时，其动能是总能量的_______。(设平衡位置处势能为零)。当这物块在平衡位置时，弹

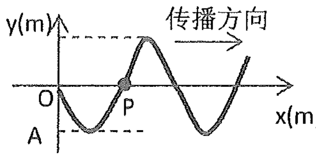
簧的长度比原厂长Δl，这一振动系统的周期为______。3/4，$2\pi\sqrt{\Delta l/g}$

9. 如图S_1、S_2为两相干波源，所发出的平面简谐横波,振动方向均垂直于纸面，分别在两种不同媒质中传播，并在P点相遇，如图所示。已知波的频率为100Hz，振幅均为0.01m，S_1的相位比S_2的相位超前$\pi/2$。在媒质1中波速$u_1 = 400\ m\cdot s^{-1}$，在媒质2中波速$u_2 = 500\ m\cdot s^{-1}$，$r_1 = 4.00m$，$r_2 = 3.75m$。P点的合振幅为_______。0.02m



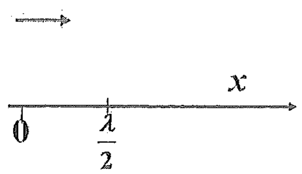
10. 一简谐振动的表达式为$y = A\cos[3t+\phi]$，已知t=0时，位移为0.04m，速度为0.09m/s，则振幅A= ____，初相ϕ=_____。 0.05m，-0.205π或-36.9°

11.如图为一平面简谐波在t=2s时刻的波形图，波的振幅为0.2m，周期为4s，则图中P点处质点的振动方程为________。 $y_p = 0.2\cos\left(\frac{1}{2}\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$



12.如图一列波长为λ 的平面简谐波沿x 轴正方向传播，波速为u。已知在$x = \lambda/2$处振动表达式为$y = A\cos\omega t$，则该平面简谐波的波函数为________。(用含有波速u的表达式表示)

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x-\lambda/2}{u})]$$



13. 在截面积为S的圆管中，有一列平面简谐波在传播，其波的表达式为$y = A\cos\left[\omega t - 2\pi(x/\lambda)\right]$，管中波的平均能量密度为w，则通过截面积S的平均能流是_________。ωλSw/2π

007打印社精心整理 QQ: 1731912014

大学物理期中考试模拟卷（1）

一、选择题（每题3分，共60分）

1、如图，在光滑水平地面上放着一辆小车，车上左端放着一只箱子，今用同样的水平恒力$\overline{F}$拉箱子，使它由小车的左端达到右端，一次小车被固定在水平地面上，另一次小车没有固定，试以水平地面为参照系，判断下列结论中正确的是（　　）

A. 在两种情况下，$\overline{F}$ 做的功相等.

B. 在两种情况下，摩擦力对箱子的功相等.

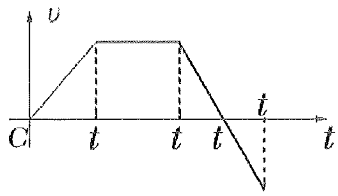
C. 在两种情况下，箱子获得的动能相等.

D. 在两种情况下，由于摩擦而产生的热相等

2、一个作直线运动的物体，其速度v与时间t的关系曲线如图所示，设时刻t_1至t_2间外力作功为W_1；时刻t_2至t_3间外力作功为W_2；时刻t_3至t_4间外力作功为W_3，则（　　）

A. $W_1>0, W_2<0, W_3<0$　　.B. $W_1>0, W_2<0, W_3>0$.

C. $W_1=0, W_2<0, W_3>0$.　D. $W_1=0, W_2=0, W_3<0$.



3、下列说法中，哪一个是正确的？　（　　）

A. 一质点在某时刻的瞬间速度是2m/s，说明它在此后1s内一定要经过2m的路程

B. 斜向上抛的物体，在最高点处的速度最小，加速度最大.

C. 物体作曲线运动时，有可能在某时刻的法向加速度为零.

D. 物体加速度越大，则速度越大.

4、一运动质点在某瞬时位于矢长$\overline{r}(x,y)$的端点处，其速度大小为（　　）

A. $\dfrac{dr}{dt}$　　B. $\dfrac{d\overline{r}}{dt}$　　C. $\dfrac{d|\overline{r}|}{dt}$　　D. $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

5、某质点作直线运动的运动学方程为$x=3t-5t^3+6$　（SI），则该质点作（　　）

A. 匀加速直线运动，加速度沿x轴正方向.

B. 匀加速直线运动，加速度沿x轴负方向.

C. 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向.

D. 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向.

6、一个物体正在绕固定光滑轴自动转动　（　　）

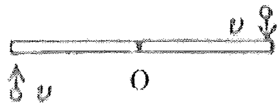
A. 它受热膨胀或遇冷收缩时，角速度不变.

B. 它受热时角速度变大，遇冷时角速度变小.

C. 它受热或遇冷时，角速度均变大.

D. 它受热时角速度变小，遇冷时角速度变大.

7. 光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止，桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示.当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为（　　）



俯视图

A. $\frac{2v}{3L}$　　B. $\frac{4v}{5L}$　　C. $\frac{6v}{7L}$　　D. $\frac{12v}{7L}$　　E. $\frac{12v}{7L}$

8、 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是（　　）

A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关.

B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关.

C. 取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置.

D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关

9、 几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体（　　）

A. 必然不会转动　　　　B. 转速必然不变

C. 转速必然改变　　　　D. 转速可能不变，也可能改变

10、均匀细棒 OA 可绕通过某一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示，今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动的竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？（　　）

A. 角速度从小到大，角加速度从大到小.

B. 角速度从小到大，角加速度从小到大.

C. 角速度从大到小，角加速度从大到小.

D. 角速度从大到小，角加速度从小到大.

11. 假设卫星环绕地球中心作圆周运动，则在运动过程中，卫星对地球中心的（　　）

A. 角动量守恒，动能也守恒　　B. 角动量守恒，动能不守恒

C. 角动量不守恒，动能守恒.　　D. 角动量不守恒，动量也不守恒

E. 角动量守恒，动量也守恒

12、有一半径为R的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为J，开始时转台以匀角速度ω_0转动，此时有一质量为m的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为（　　）

A. $\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$　　B. $\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$　　C. $\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$　　D. ω_0

13、刚体角动量守恒的充分而必要的条件是（　　）

A. 刚体不受外力矩的作用

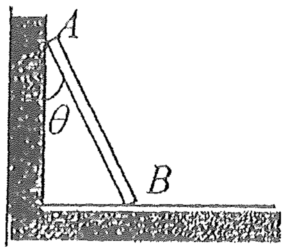
B. 刚体所受合外力矩为零

C. 刚体所受的合外力和合外力的矩均为零

D. 刚体的转动惯量的角速度均保持不变

14、如图所示，一质量为m的匀质细杆AB，A端靠在光滑的竖直墙壁上，B端直于粗糙水平地面上而静止，杆身与竖直方向成θ角，则A端对墙壁的压力大小（　　）

A. 为$\dfrac{1}{4}mg\cos\theta$　　B. 为$\dfrac{1}{2}mgtg\theta$　　C. 为$mg\sin\theta$　　D. 不能唯一确定



15、有两个半径相同，质量相等的细圆环A和B. A环的质量分布均匀，B环的质量均匀，它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为J_A和J_B，则（　　）

A. $J_A > J_B$　　B. $J_A < J_B$　　C. $J_A = J_B$　　D. 不能确定J_A、J_B哪个大

16、一质点作简谐振动，周期为T，当它由平衡位置向x轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路所需要的时间为（　　）

A. $T/12$　　B. $T/8$　　C. $T/6$　　D. $T/4$

17、两个质点各自作简谐振动，它们的振幅相同、周期相同，第一个质点的振动方程为 $x_1 = A\cos(\omega t + \alpha)$.当第一个质点从相对于其平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大正位移处，则第二个质点的振动方程为（　　）

A. $x_2 = A\cos(\omega t + \alpha + \frac{1}{2}\pi)$　　B. $x_2 = A\cos(\omega t + \alpha - \frac{1}{2}\pi)$

C. $x_2 = A\cos(\omega t + \alpha - \frac{3}{2}\pi)$　　D. $x_2 = A\cos(\omega t + \alpha + \pi)$

18、把单摆球从平衡位置向位移正方向拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ，然后由静止放手任其振动，从放手时开始计时，若用余弦函数表示其运动方程，则该单摆振动的初相为（　　）

A. π　　B. $\pi/2$　　C. 0　　D. θ

19、有两个力作用在一个有固定的转轴的刚体上：

（1）这两个力都平行于轴作用时，它们对轴的合力矩一定是零；

（2）这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴的合力矩可能是零；

（3）当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零；

（4）当这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也是一定是零；

在上述说法中，（　　）

A. 只有（1）是正确的

B. （1）、（2）正确，（3）、（4）错误

C. （1）、（2）、（3）都正确，（4）错误

D. （1）、（2）、（3）、（4）都正确

20、一块方板，可以绕通过其一个水平边的光滑固定轴自由转动，最初板自由下垂，今有一小团粘土，垂直板面撞击方板，并粘在板上，对粘土和方板系统，如果忽略空气阻力，在碰撞中守恒的量是（　　）

A. 动能　　B. 绕木板转轴的角动量　　C. 机械能　　D. 动量

二、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1、在一个转动的齿轮上，一个齿尖 P 沿半径为 R 的圆周运动，其路程 S 随时间的变化规律为 $S=v_0t+\frac{1}{2}bt^2$，其中 v_0 和 b 都是正的常量，则 t 时刻齿尖 P 的速度大小为__________，加速度大小为____________.

2、一质点作半径为 0.1m 的圆周运动，其角位置的运动学方程为：$\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t^2(SI)$，则其切向加速度为 $a_t=$ ________________

3、已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=4t^2\vec{i}+(2t+3)\vec{j}\,(SI)$，则该质点的轨道方程为__________

4、轮船在水上以相对于水的速度 $\vec{v}_1$ 航行，水流速度为 $\vec{v}_2$，一人相对于甲板以速度 $\vec{v}_3$ 行走，如人相对于岸静止，则 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 和 $\vec{v}_3$ 的关系是_________.

5、半径为 $r=1.5m$ 的飞轮，初角速度 $\omega_0=10rad/s$，角加速度 $\beta=-5rad/s^2$，则在 $t=$ __________ 时角位移为零，而此时边缘上点的线速度 $v=$___________.

6、一定滑轮质量为 M、半径为 R，对水平轴的转动惯量 $J=MR^2/2$.在滑轮的边缘绕一细绳，绳的下端挂一物体，绳的质量可以忽略且不能伸长，滑轮与轴承间无摩擦，物体下落的加速度为 a，则绳中的张力 $T=$ ____________

7、一个作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量为 J，正以角速度 $\omega_0=10rad/s$ 匀速转动，现对物体加一恒定制动力矩 $M=-0.5Nm$，经过时间 $t=5.0s$ 后，物体停止了转动，物体的转动惯量 $J=$________.

8、两个相同的弹簧下和悬一物体，两物体的质量比为 4:1，则二者作简谐振动的周期之比为__________________________.

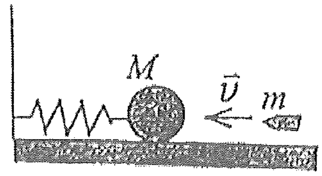
9、一弹簧振子，弹簧的劲度系数为 k，重物的质量为 m，则此系统的固有振动周期为____

10、两个弹簧振子的周期都是 0.4s，设开始时第一个振子从平衡位置向负方向运动，经过 0.5s 后，第二个振子才从正方向的端点开始运动，则这两振动的相位差为____________.

大学物理期中考试（2）

一、选择题（每题3分，共60分）

1. 一质量为M的弹簧振子，水平放置且静止在平衡位置，如图所示.一质量为m的子弹以水平速度$\bar{v}$射入振子中，并随之一起运动，如果水平面光滑，此后弹簧的最大势能为（　　）



A. $\frac{1}{2}mv^2$　　B. $\frac{m^2v^2}{2(M+m)}$

C. $(M+m)\frac{m^2}{2M^2}v^2$　　D. $\frac{m^2}{2M}v^2$

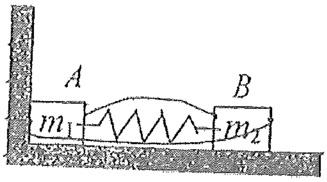
2. 两木块A、B的质量分别为m_1和m_2，用一个质量不计、劲度系数为k的弹簧连接起来，把弹簧压缩x_0并用线扎住，放在光滑水平面上，A紧靠墙壁，如图所示，然后烧断扎线.判断下列说法哪个正确.（　　）

A. 弹簧由初态恢复为原长的过程中，以A、B、弹簧为系统，动量守恒.

B. 在上述过程中，系统机械能守恒.

C. 当A离开墙后，整个系统动量守恒，机械能不守恒.

D. A离开墙后，整个系统的总机械能为$\frac{1}{2}kx_0^2$，总动量为零.



3. 在以加速度a向上运动的电梯内，挂着一根劲度系数为k、质量不计的弹簧，弹簧下面挂着一质量为M的物体，物体相对于电梯的速度为零，当电梯的加速度突然变为零后，电梯内的观测者看到物体的最大速度为（　　）

A. $a\sqrt{M/k}$　　B. $a\sqrt{k/M}$　　C. $2a\sqrt{M/k}$　　D. $\frac{1}{2}a\sqrt{M/k}$

4. 关于机械能守恒条件和动量守恒条件有以下几处说法，其中正确的是（　　）

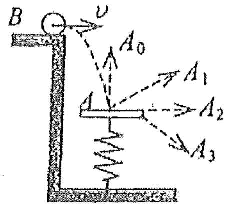
A. 不受外力作用的系统，其动量和机械能必然同时守恒.

B. 所受合外力为零，内力都是保守力的系统，其机械能必然守恒.

C. 不受外力，而内力都是保守力的系统，其动量和机械能必然同时守恒.

D. 外力对一个系统做的功为零，则该系统的机械能和动量必然同时守恒.

5. 质量为m的平板A，用竖立的弹簧支持而处在水平位置，如图，从平台上投掷一个质量也是m的球B，球的初速为v，沿水平方向，球由于重力作用下落，与平板发生完全弹性碰撞。假定平板是光滑的，则与平板碰撞后球的运动方向应为（　　）



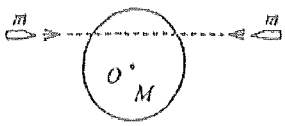
A. A_0方向　　B. A_1方向　　C. A_2方向　　D A_3方向

6. 质量为m的小孩站在半径为R的水平平台边缘上，平台可以绕通过其它中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为J.平台和小孩开始时均静止，当小孩突然以相对于地面为v的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为（　　）

A. $\omega=\dfrac{mR^2}{J}\left(\dfrac{v}{R}\right)$,顺时针　　B. $\omega=\dfrac{mR^2}{J}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，逆时针

C. $\omega=\dfrac{mR^2}{J+mR^2}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，顺时针　　D. $\omega=\dfrac{mR^2}{J+mR^2}\left(\dfrac{v}{R}\right)$,逆时针.

7. 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴O转动，如图射来的两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度ω（　　）



A. 增大　　B. 不变　　C. 减小　　D. 不能确定

8. 有两个力作用在一个有固定的转轴的刚体上：

（1）这两个力都平行于轴作用时，它们对轴的合力矩一定是零；

（2）这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴的合力矩可能是零；

（3）当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零；

（4）当这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也是一定是零；

在上述说法中，（　　）

A. 只有（1）是正确的

B. （1）、（2）正确，（3）、（4）错误

C. （1）、（2）、（3）都正确，（4）错误

D. （1）、（2）、（3）、（4）都正确

9. 将细绳绕在一个具有水平光滑轴的飞轮边缘上，现在在绳端挂一质量为m的

重物，飞轮的角加速度为β.如果以拉力$2mg$代替重物拉绳时，飞轮的角加速度将（　　）

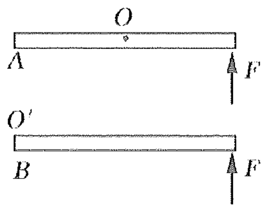
A. 小于β　　B. 大于β，小于2β　　C. 大于2β　　D. 等于2β

10. 有一半径为R的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为J，开始时转台以匀角速度ω_0转动，此时有一质量为m的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为（　　）

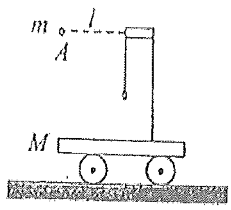
A. $\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$　　B. $\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$　　C. $\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$.　　D. ω_0

11. 如图所示，两条质量和长度均相同的匀质细棒A、B，可分别绕通过中点O和左端O'的水平轴转动，设它们的右端都受到一个铅直力F作用，则它们绕各自转轴的角加速度β_A和β_B的关系为（　　）

A. $\beta_A=\beta_B$　　B. $\beta_A>\beta_B$　　C. $\beta_A<\beta_B$　　D. 不能确定



12. 静止在光滑水平面上的一质量为M的车上悬挂一单摆，摆球质量为m，摆线长为l.开始时，摆线水平，摆球静止于A点，突然放手，当摆球运动到摆线呈竖直位置的瞬间，摆球相对于地面的速度为（　　）

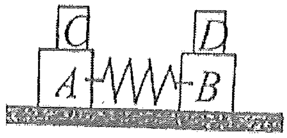


A. 0　　B. $\sqrt{2gl}$　　C. $\sqrt{\dfrac{2gl}{1+m/M}}$　　D. $\sqrt{\dfrac{2gl}{1+M/m}}$

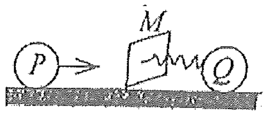
13. 如图所示，质量分别为m_1和m_2的物体A和B，置于光滑桌面上，A和B之间连有一轻弹簧，另有质量为m_1和m_2的物体C和D分别置于物体A与B之上，且物体A和C、B和D之间的摩擦系数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压A和B之上，且物体A和C、B，使弹簧被压缩，然后撤掉外力，则在A和B弹开的过程中，对A、B、C、B弹簧组成的系统（　　）

A. 动量守恒，机械能守恒.　　　　B. 动量不守恒，机械能守恒

C. 动量不守恒，机械能不守恒　　　D. 动量守恒，机械能不一定守恒



14. 如图所示，在光滑平面上有一个运动物体 P，在 P 的正前方有一个连有弹簧和挡板 M 的静止物体 Q，弹簧和挡板 M 的质量均不计，P 与 Q 的质量相同，物体 P 与 Q 碰撞后 P 停止，Q 以碰前 P 的速度运动，在此碰撞过程中，弹簧压缩量最大的时刻 是（　　）



A. P 的速度正好变为零时　　　B．P 与 Q 速度相等时

C. Q 正好开始运动时　　　D．Q 正好达到原来 P 的速度时

15. 站在电梯内的一个人，看到用细线连结的质量不同的两个物体跨过电梯内的一个无摩擦的定滑轮而处于“平衡”状态，由此，他断定电梯作加速运动，其加速度为（　　）

A. 大小为 g，方向向上.　　　B. 大小为 g，方向向下.

C. 大小为 $\frac{1}{2}g$，方向向上，　　　D. 大小为 $\frac{1}{2}g$，方向向下.

16. 质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处(球面固定不动)，如图所示，当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度大小为（　　）

A. $a=2g(1-\cos\theta)$　　　B. $a=g\sin\theta$

C. $a=g$　　　D. $a=\sqrt{4g^2(1-\cos\theta^2+g^2\sin^2\theta}$

17. 如图所示两个小球用不能伸长的细软线连接，垂直地跨过固定在地面上、表面光滑的半径为 R 的圆柱，小球 B 着地，小球 A 的质量为 B 的两倍，且恰与圆柱的轴心一样高，由静止状态轻轻释放 A，当 A 球到达地面后，B 球继续上升的最大高度是（　　）

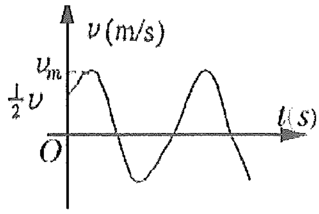
A. R　　B. $\frac{2}{3}R$　　C. $\frac{1}{2}R$　　D. $\frac{1}{3}R$

18. 一特殊的轻弹簧，弹性力 $F=\uparrow/\alpha^3$，k 为一常量系数，x 为伸长（或压缩）量.现将弹簧水平放置于光滑的水平面上，一端固定，一端与质量为 m 的滑

块相连而处于自然长度状态，今沿弹簧长度方向给滑块一个冲量，使其获得一速度v，压缩弹簧，则弹簧被压缩的最大长度为（　　）

A. $\sqrt{\frac{m}{k}}v$　　　B. $\sqrt{\frac{k}{m}}v$　　　C. $(\frac{4mv}{k})^{1/4}$　　　D. $(\frac{2mv^2}{k})^{1/4}$

19. 一质点作简谐振动，其运动速度与时间的曲线如图所示，若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初相应为（　　）



A. $\pi/6$　　B. $5\pi/6$　　C. $-5\pi/6$

D. $-\pi/6$　　E. $-2\pi/3$

20. 一质点在x轴上作简谐振动，振幅$A=4cm$，周期$T=2s$，其平衡位置取作坐标原点，若$t=0$时刻质点第一次通过$x=-2cm$处，且向x轴负方向运动，则质点第二次通过$x=-2cm$处的时刻为（　　）

A. 1s　　B. $(2/3)s$　　C. $(4/3)s$　　D. 2s

二、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. 质点沿半径为R做圆运动，运动学方程$\theta=3+2t^2(SI)$，则t时刻质点的法向加速度大小为$a_n=$________，再加速度$\beta=$ ________。

2. 一质点沿X轴运动，其加速度为$a=4t(SI)$，已知$t=0$时，质点位于$X_0=10m$处，初速度$V_0=0$，则位置和时间的关系为____________。

3. 一长为L，质量均匀的链条，放在光滑的水平桌面上，若使其长度的$L/2$悬挂于桌边下，然后由静止释放，任其滑动，则它全部离开桌面时的速率为__________.

4. 一定滑轮质量为M、半径为R，对水平轴的转动惯量$J=MR^2/2$. 在滑轮的边缘绕一细绳，绳的下端挂一物体，绳的质量可以忽略且不能伸长，滑轮与轴承间无摩擦，物体下落的加速度为a，则绳中的张力$T=$ ____________

5. 两块并排的木块A和B，质量分别为m_1和m_2 静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平的穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为Δt_1和Δt_2，木块对子弹的阻力为恒力F，则子弹穿出后，木块A的速度大小为_______，

木块B的速度大小为__________

6. 半径为$20cm$的主动轮，通过皮带拖动为50cm的被动轮转动，皮带与轮之间无相对滑动，主动轮从静止开始作匀角加速转动，在4s内被动轮的角速度达到$8\pi rad/s$，则主动轮在这段时间内转过了______圈.

7. 质量为$M=0.03kg$、长为$l=0.2m$的均细棒，可在水平面内绕通过棒中心并与棒垂直的光滑固定轴转动，其转动惯量为$Ml^2/12$.棒上套有两个可沿棒滑动的小物体，它们的质量均为$m=0.02kg$，开始时，两个小物体分别被夹子固定于棒中心的两边，到中心的距离均为$r=0.05m$，棒以$-0.5\pi rad/s$的角速度转动，今将夹子松开，两小物体就沿细棒向外滑去，当达到棒端时棒的角速度$\omega=$ __________

8. 一弹簧振子，重物的质量为m，弹簧的劲度系数为k，该振子作振幅为A的简谐振动。当重物通过平衡位置且向规定的正方向运动时，开始计时，则其振动方程为_______

9. 有一劲度系数为k的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为m的小球，先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触，再将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力所作的功为________________

10. 一个质量为m的质点，仅受到$\overline{F}=k\overline{r}/r^3$的作用，式中$k$为常量，$\overline{r}$为从某一定点到质点的矢径.该质点在$r=r_0$处被释放，由静止开始运动，则当它到达无穷远时的速率为

____