上次课总结：1、二重积分的几何意义与物理意义

曲顶柱体的体积　　平面薄片的质量

2. 二重积分的性质（单调性，积分中值定理）

3. $\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

上

下

D → X-型区域

$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$

右

左

D → Y-型区域

例15 设D：$a \le x \le b$， $c \le y \le d$， $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

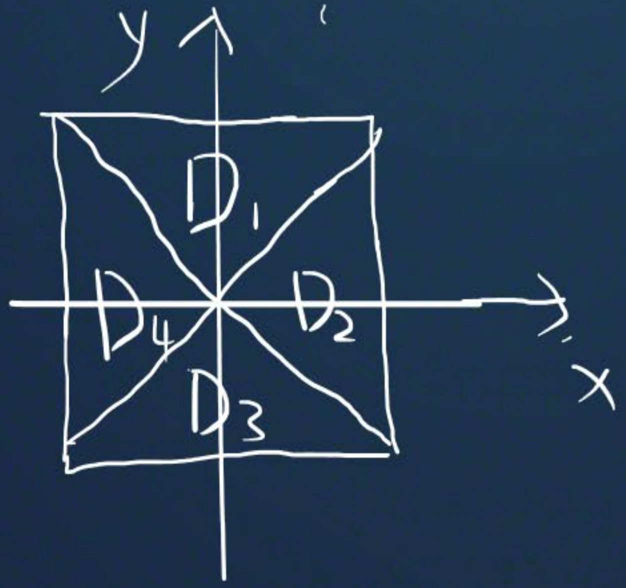
可积，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy$

练习：设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $[0,1]$ 上连续且单调减少的函数，证明：$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$

练习4：如图，正方形$\{(x,y) \mid |x|\le 1, |y|\le 1\}$被其对角线

划分成D_k $(k=1,2,3,4)$，$I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x \, d\sigma$，

则$\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}$ = ______.



练习6：将 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$ 化为极坐标下的二次积分为 ________.

练习：求介于 $z=x^2+y^2$ 与 xoy 面之间且位于 $x^2+y^2=2x$

内部的立体的体积.

上次课总结：1、极坐标计算二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho.$$

2、简化二重积分的计算：① 交换二次积分的积分次序.

注：D既是X-型区域又是Y-型区域.

② $$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)$$

注 对D的要求：$a\le x\le b \quad c\le y\le d$.

对$f(x,y)$的要求：$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$.

③ 对称性：核心是找对称点的坐标.

$$f(\text{对称点}) = -f(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,d\sigma = 0$$

$$f(\text{对称点}) = f(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

$$= 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$$

1、引例：设空间立体 Ω，其质量非均匀分布，体密度

$\rho(x,y,z) \in C(\Omega)$　求 Ω 的质量 M.

(1) 大化小：将 Ω 分成 n 个小立体 Ω_i，用 ΔV_i 表示

Ω_i 的体积，　$i=1,2,\cdots,n$

(2) 常代变：$\forall(x_i,y_i,z_i)\in\Omega_i$　　$m_i \approx \rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$

(3) 近似和：$M=\sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$

(4) 取极限：$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

例11 求$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中$\Omega$为$x+y+z=1$与三个坐标面所围成的区域.

例12 求 $\iiint\limits_{\Omega} y\,dv$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=\sqrt{x^2+z^2}$

所围成的区域.

例13. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

例14 求 $\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,dv$，其中 Ω 是由

$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$z=1$，$z=4$ 围成

例15 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面所围成的四面体.

例16 求 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\, dv$，其中 Ω 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与

$z=1$ 所围成.

练习1：求 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\leq 1$，$z\geq 0$

练习2：求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，其中 Ω 由 $x^2+y^2=2z$，及 $z=2$ 所围成.

练习3：求 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dv$，其中 Ω：$x^2+y^2\leq z\leq 2-x^2-y^2$

例17 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv$，其中 Ω 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与

$x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体

例18：求 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围立体体积.

练习4：1. 设 $f(u)$ 具有连续的导数，$f(0)=0$，则

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv = \underline{\qquad\qquad}$$

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$.

2. 求 $\iiint_{\Omega}\frac{5}{8\pi}\left(x+y+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\le 2$，$x^2+y^2\le 1$，

$z\geqslant 1$.

上次课总结：1."先一后二"法：Ω为xy型闭区域$\Rightarrow$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)\ 下}^{z_2(x,y)\ 上} f(x,y,z)\,dz.$$

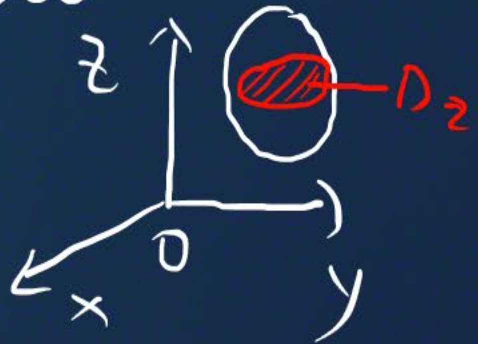
Ω为xz型闭区域$\Rightarrow$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\iint_{D_{xz}} d\sigma \int_{y_1(x,z)\ 左}^{y_2(x,z)\ 右} f(x,y,z)\,dy$$

Ω为yz型闭区域$\Rightarrow$

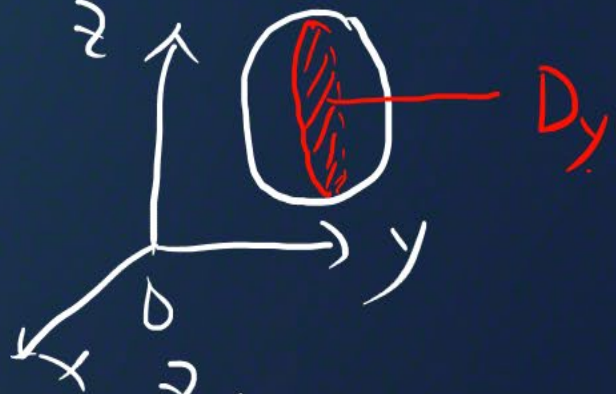
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\iint_{D_{yz}} d\sigma \int_{x_1(y,z)\ 后}^{x_2(y,z)\ 前} f(x,y,z)\,dx$$

2、"先二后一"法：固定 z：$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$



$$=\int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

固定 y：$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$



$$=\int_c^d dy \iint_{D_y} f(x,y,z)\,dx\,dz$$

固定 x：$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$

$$=\int_c^d dx \iint_{D_x} f(x,y,z)\,dy\,dz$$

3. 对称性：Ω 关于 $x=0$ 对称：$f(-x,y,z)=f(x,y,z)$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dv$$

$f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 0.$$

Ω 关于 $y=0$ 对称：$f(x,-y,z)=f(x,y,z)$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dv$$

$f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 0.$$

Ω关于 $z=0$ 对称：$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ $\Rightarrow$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dv \qquad f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = 0.$$

4. 轮换对称性：x换成y，y换成z，z换成x，Ω不变，

x,y,z 在Ω中范围一样 $\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$

$$= \iiint_{\Omega} f(y,z,x)\,dv = \iiint_{\Omega} f(z,x,y)\,dv$$

上次课总结：1. 柱面坐标：当Ω的投影 D_{xy} 为圆盘时，

考虑使用柱面坐标：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{0}^{\rho(\theta)} \underset{*}{\underline{\rho}}\, d\rho \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,dz$$

（上曲面）

（下曲面）

2. 球面坐标：当Ω中含有 $x^2+y^2+z^2$ 项时，考虑使用球面坐标。

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{0}^{\pi} \underset{*}{\underline{\sin\varphi}}\, d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\varphi,\theta)\,\underset{*}{\underline{r^2}}\,dr$$

例1：求 $x^2+y^2+z^2 \le 4R^2$ 被 $x^2+y^2=2Rx$ $(R>0)$ 所截得的

（含在圆柱面内部分）立体的体积.

<u>例12</u>　用二重积分求半径为R的球的表面积、

例3 求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的形心.

例4：求占有闭区域 $D: x^2+y^2 \le 2x$，$y \ge 0$ 的均匀薄片

$(\mu(x,y) \equiv \mu)$ 对 x 轴的转动惯量。

例5. 已知曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围成的立体内任一点的密度与该点到原点的距离成正比（比例系数为 k），求该物体的重心坐标.

例16. 求密度为1的均匀球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 1$ 对坐标轴的转动惯量.

上次课总结：1. 曲面的面积：$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$

2. 重心坐标

※考虑对称性

平面薄片：$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}$

空间立体：$\bar{x}=\dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dv}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dv}$

$$\bar{y}=\frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,dv}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dv} \qquad \bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,dv}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dv}$$

3. 对坐标轴的转动惯量：

①平面薄片： $I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)\,d\sigma$， $I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)\,d\sigma$

②空间立体： $I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv$

$I_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv$ $I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dv$