哈尔滨工程大学
Harbin Engineering University

学业帮扶进书院•数学研学小讲堂系列讲座

工科数学分析（二）

——多元函数积分学

于　涛

主办单位：数学科学学院 公共数学教研部

协办单位：海岳书院、求理书院、求是书院、求新书院、至诚书院、至工书院、至善书院、至学书院

哈尔滨工程大学

高等数学

助 学 讲 座

多 元 函 数 积 分 及 应 用

知识总结与典型题解析

①内容介绍

（一）二元函数的二重积分

一、微元法建立数学模型

二、二重积分的性质与应用

三、二重积分的计算（重点）
- 直角坐标系
- 极坐标系
- 特点技巧
  - 对称
  - 轮换
  - 变形

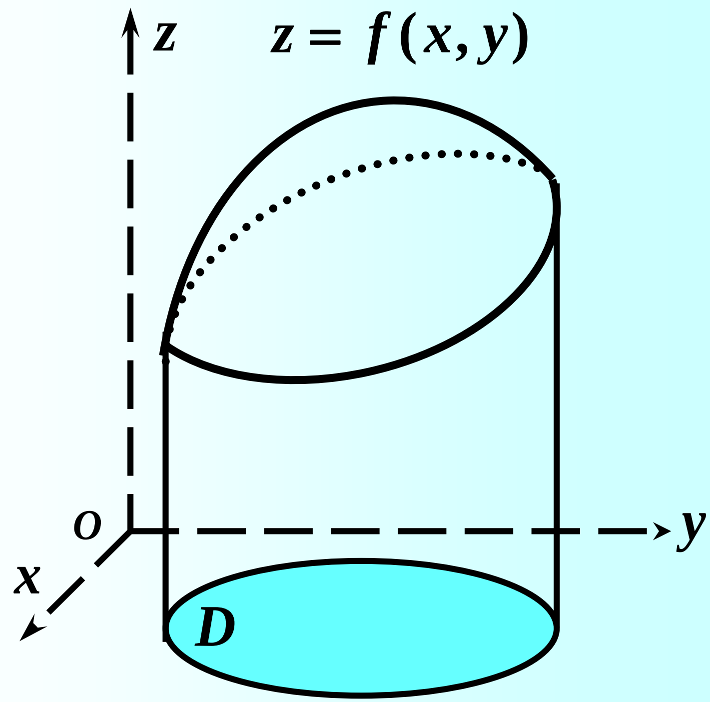
第八章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

一、二重积分的渊源

1. 曲顶柱体的体积

在空间直角坐标系中，以 xOy 平面的闭区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，侧面为平行于 z 轴的柱面，这样的立体一般称为曲顶柱体.



问题：如何计算曲顶柱体的体积？

哈尔滨工程大学 高等数学

•微元法：$V=\int dV,$ $\Delta V\approx dV\Rightarrow V=\int\Delta V$

1、平顶柱体的体积（规则）

体积V=底面积S×柱体高度H

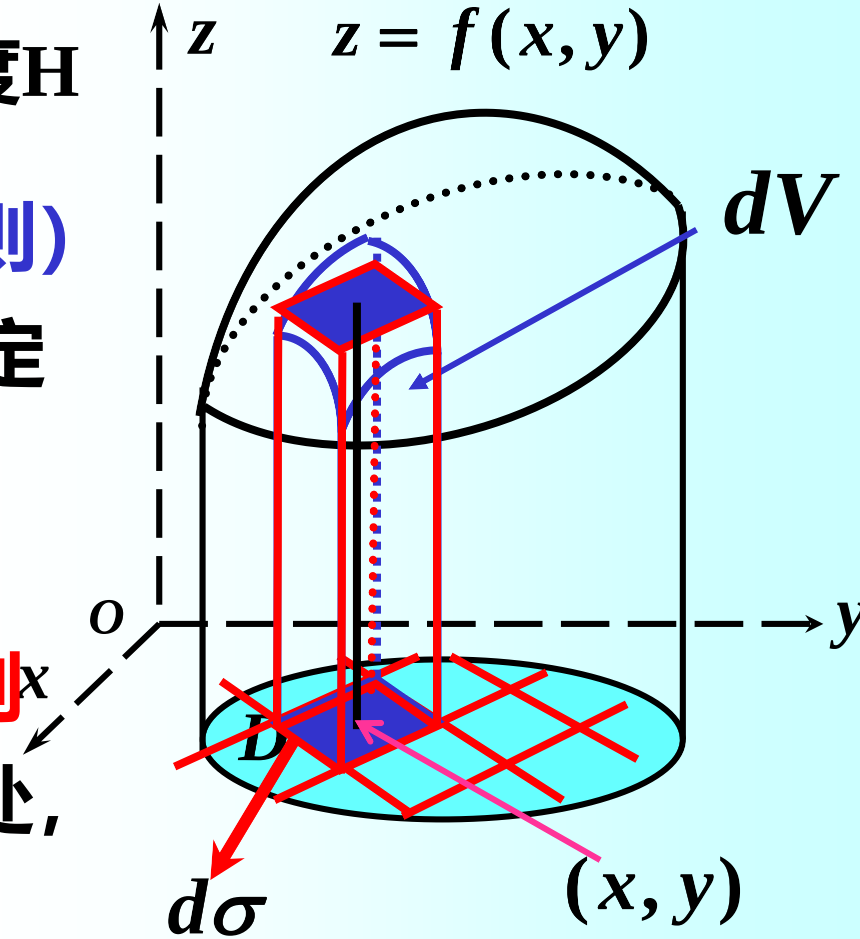
2、曲顶柱体的体积（不规则）

柱体高度H不存在确定的数值，是一个变量。

公式V=S×H，无法使用。

3、微元：用规则代替不规则

在平面区域D中(x,y)处，任取微小的面积元素dσ,



dV= $f(x,y)d\sigma$ $V=\int dV=\iint_D f(x,y)d\sigma$

• 微元法求曲顶柱体的体积：

$$dV = f(x,y)d\sigma,$$

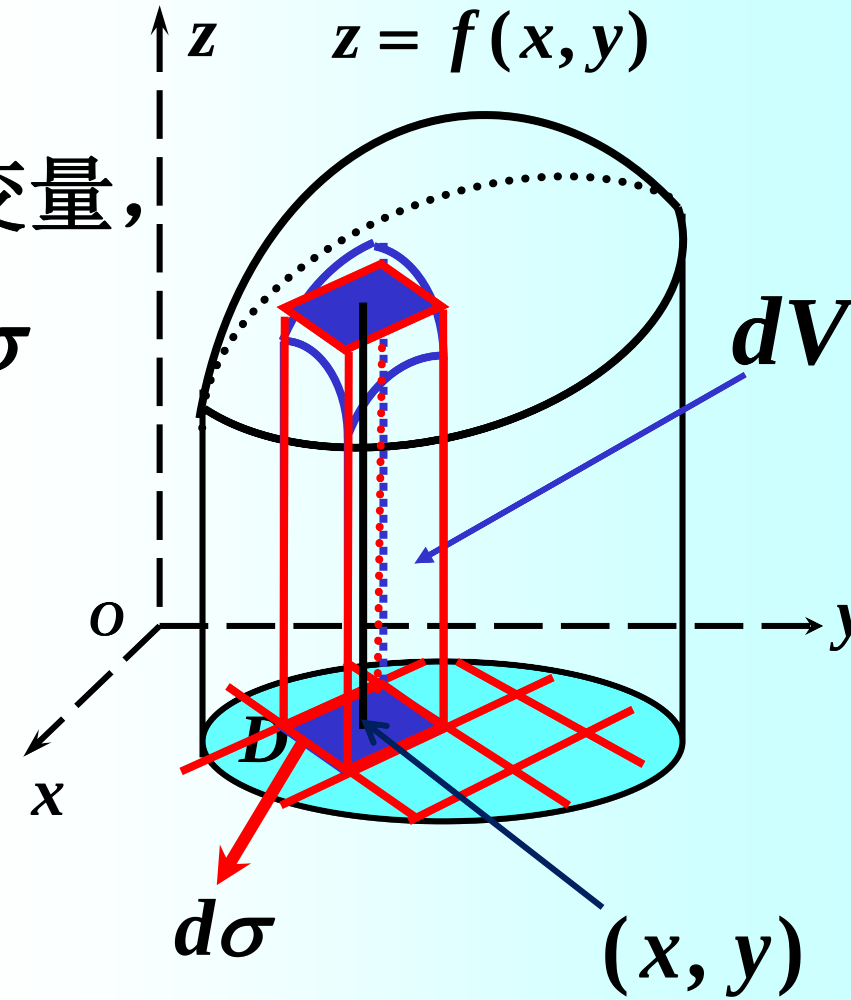
面积微元$d\sigma \in D$，二维变量，

$$V = \int dV = \iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$\iint_{\boxed{D}} f(x,y)d\sigma$$

dσ的取值范围

dσ的维数



$$d\sigma = dxdx;\quad \iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

哈尔滨工程大学 高等数学

2. 平面薄片的质量

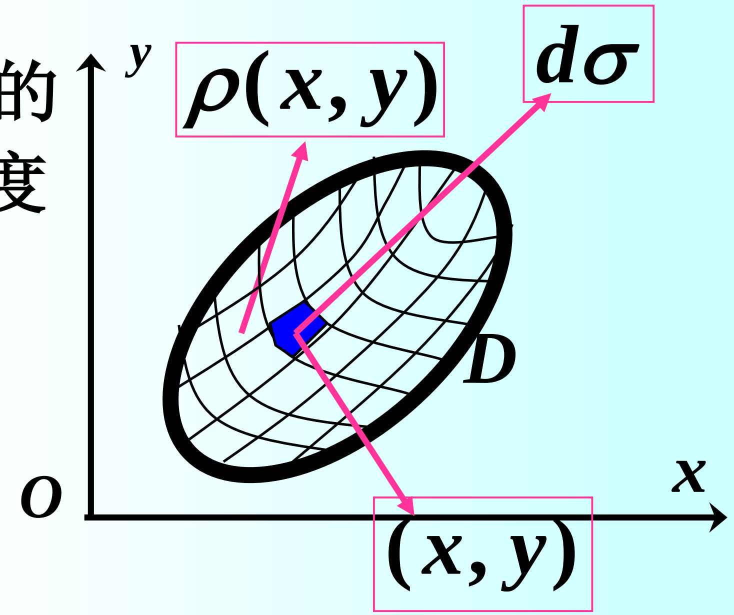
设有一平面薄片, 占有xoy面上的闭区域D, 在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$.

问题：如何求平面薄片的质量M?

•规则问题:

设有一平面薄片, 占有xoy面上的闭区域D, 在点(x,y)处的面密度为常数ρ。

则平面薄片质量：$M=\rho\cdot S_D$



•不规则问题：微元法

$$dM=\rho(x,y)d\sigma,$$

$$M=\int dM=\iint_D\rho(x,y)d\sigma$$

二、二重积分的性质

二重积分与定积分的性质类似, 我们有:

1. $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

2. $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$. ($k$ 为常数)

3. (二重积分的区域可加性)设闭区域 D 被一条曲线分成两个闭区域 D_1 和 D_2, 则有

$$\iint\limits_{D_1+D_2} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

4. $\iint\limits_D d\sigma = \iint\limits_D 1d\sigma =$ 区域 D 的面积.

哈尔滨工程大学

5. 若对任意的$(x,y)\in D$，有$f(x,y)\le g(x,y)$成立，则$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

6. $$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

7. (二重积分估值定理)设M、m分别$f(x,y)$在闭区域D上最大值与最小值，并设S_D为区域D的面积，则有
$$mS_D \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS_D.$$

8. (二重积分中值定理)设$f(x,y)$在闭区域D上连续，则存在$(\xi,\eta)\in D$，使得
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D.$$

高等数学

比较积分值大小的题型

哈尔滨工程大学

高等数学

1. 积分不等式

$$mS_D \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS_D.$$

2. 积分区域一样，被积函数比大小.

3. 被积函数一样，积分区域比大小.

哈尔滨工程大学

高等数学

例1. 估计积分值的范围：

$$I=\iint_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma\,; \qquad D: 0\le x\le 1, -1\le y\le 1$$

D 的 面 积 为 2， 由 积 分 估 值 定 理

$$mS_D\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le MS_D. \qquad m\le f(x,y)\le M$$

$$f(x,y)=e^{x^2+y^2}=e^{x^2}\cdot e^{y^2}$$

$$0\le x\le 1, -1\le y\le 1 \qquad e^{0^2}\cdot e^{0^2}\le e^{x^2}\cdot e^{y^2}\le e^{1^2}\cdot e^{1^2}$$

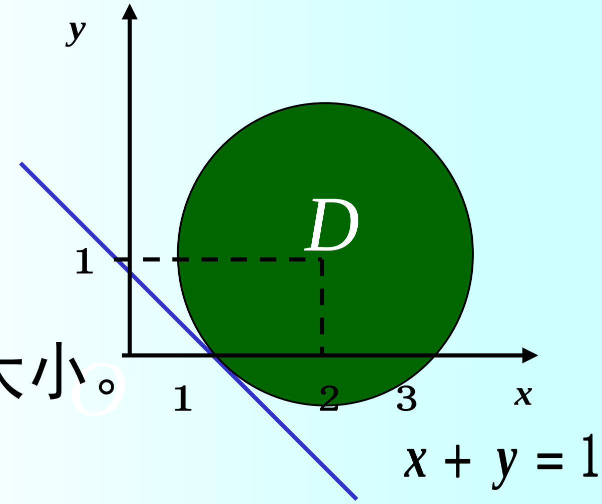
$$2\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le 2e^2.$$

哈尔滨工程大学 高等数学

例2. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\,,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



分析: 积分域 D 一样，看被积函数的大小。

解 $(x+y)^2=(x+y)^3 \Rightarrow x+y=0;\ \ x+y=1$

积分域 **D** 的边界为圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

它在与 **x** 轴的交点 **(1,0)** 处与直线 $x+y=1$ 相切.

而域 **D** 位于直线的上方, 故在 **D** 上 $x+y\ge 1$，从而

$$(x+y)^2 \le (x+y)^3$$

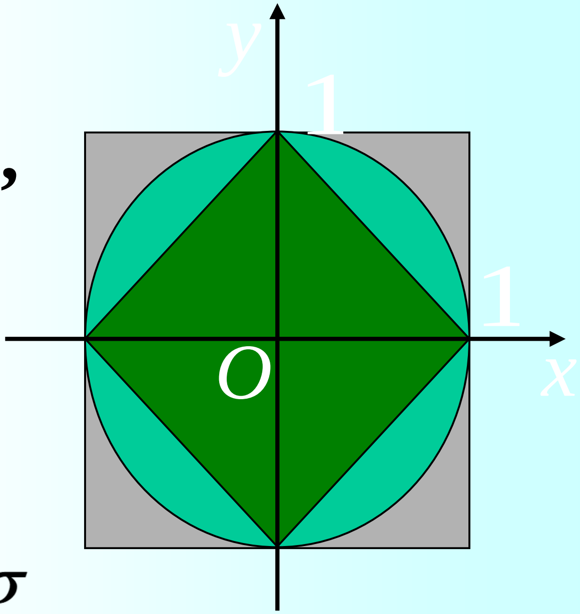
$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例3. 比较积分值的大小：

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

解： I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负, 由它们的积分域范围可知



$$I_2 < I_1 < I_3$$

f 非负,则 $\iint\limits_{D_1+D_2} f(x,y)d\sigma \ge \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$

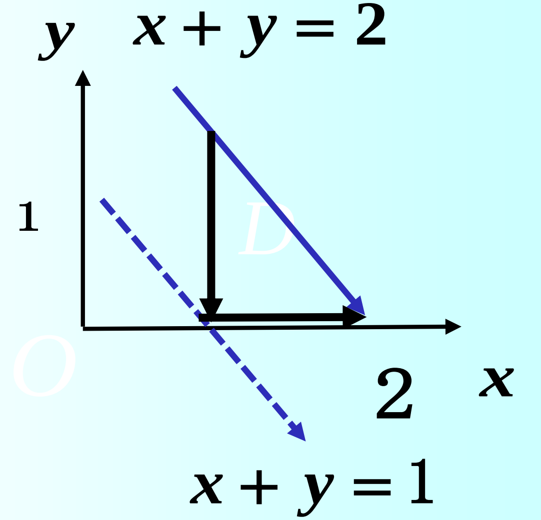
(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为三角形

三角形的三个顶点分别为(1,0),(1,1),(2,0).

解 考虑被积函数的大小?

令 $\ln(x+y)=\ln^2(x+y)$

$\Rightarrow x+y=1,\ \ x+y=e$



如图,$1\le x+y\le 2<e$

所以,$0\le \ln(x+y)<1$

则有,$\ln(x+y)\ge[\ln(x+y)]^2$

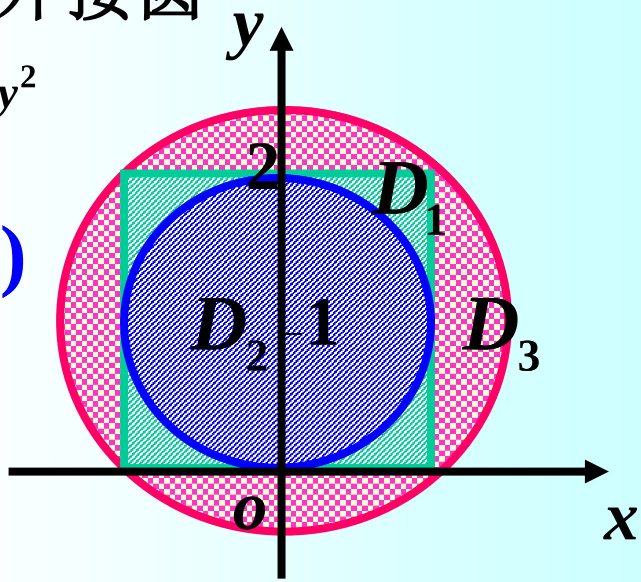
则有,$\iint_D \ln(x+y)d\sigma \ge \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$

例4. 设D_1是以(0,1)为中心，边长为 2 的正方形，D_2、D_3分别是D_1的内切圆与外接圆

$$f(x,y)=(2y-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$I_k=\iint_{D_k} f(x,y)d\sigma \quad (k=1,2,3)$$

试比较I_1,I_2,I_3之大小。



解 函数$f(x,y)$连续

$$f(x,y)=[1-x^2-(y-1)^2]e^{-x^2-y^2}$$

因为在D_2内部$f(x,y)>0$； 在D_2外部$f(x,y)<0$

所以有 $I_3<I_1<I_2$（也可用“≤”）。

例5. 设D为 $x^2+y^2\le r^2$

则$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$等于（$B$）

(A) πr^2; √(B) 1; (C) $\dfrac{1}{\pi r^2}$; (D) 0。

分析: $\because\ f(x,y)=e^{x^2+y^2}\cos(x+y)$在$D$上连续,

由重积分中值定理

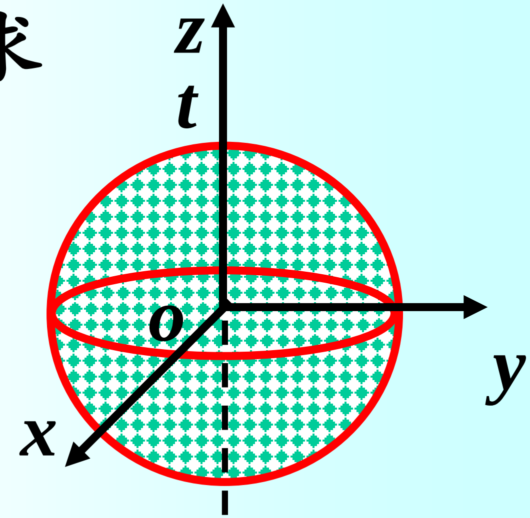
$$\iint_D e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{f(\xi,\eta)\cdot\pi r^2},\quad(\xi,\eta)\in D$$

$$\text{原极限}=\lim_{r\to 0}f(\xi,\eta)=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}e^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1$$

例9 设$f(t)$连续, $f(0)=0,\ f'(0)=1$, 求

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$$

其中Ω: $x^2+y^2+z^2\le t^2$



解 $$\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t} f(r)r^2\sin\varphi dr \quad =4\pi\int_0^{t} f(r)r^2dr$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv=\lim_{t\to0^+}\frac{4}{t^4}\int_0^{t}r^2 f(r)dr$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{4t^2 f(t)}{4t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)\ =1。$$

为什么不用重积分中值定理？？

哈尔滨工程大学

高等数学

第二节、二重积分的计算

一、直角坐标系下的计算

利用模型重构法（体积）或降维法（质量），二重积分可以转化为如下的二次积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} \int_{x_{小}}^{x_{大}} dx \int_{y_{小}}^{y_{大}} f(x,y)dy. \\ \int_{y_{小}}^{y_{大}} dy \int_{x_{小}}^{x_{大}} f(x,y)dx. \end{cases}$$

如何将积分区域的边界曲线 转化为二次积分上下限?

x

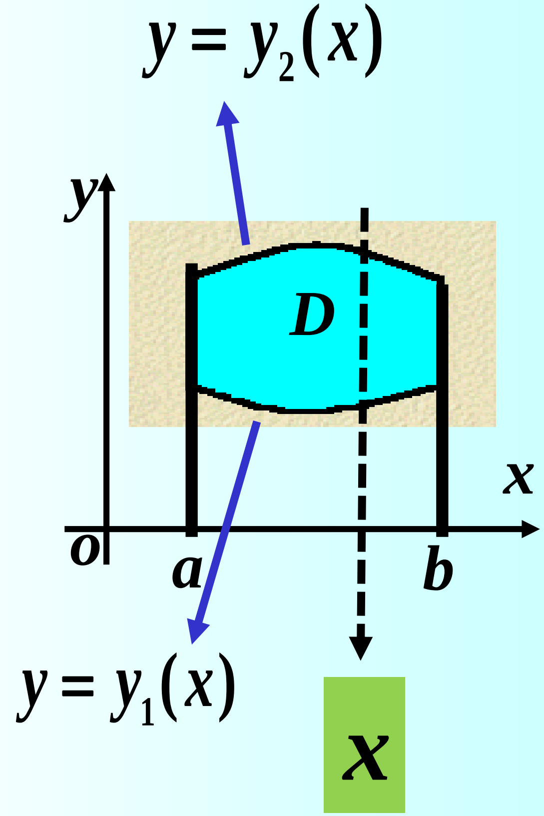
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

$$\iint\limits_D f d\sigma=\int_{x_{小}}^{x_{大}} dx\int_{y_{小}}^{y_{大}} f dy.$$

$\forall x$, 在虚线上找 $y_{大}$ 与 $y_{小}$

虚线平行滑动,

在 D 上找 $x_{大}$ 与 $x_{小}$



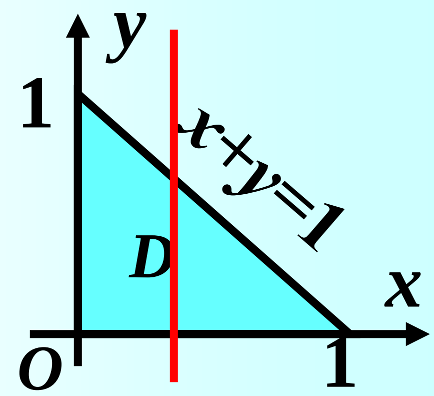
虚线平行滑动, $y_{大}$ 与 $y_{小}$ 不能改变

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_{下曲线}}^{y_{上曲线}} f(x,y)dy.$$

例 1 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中 D 是直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的部分.

解 积分区域如图，

积分次序：先y后x



$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma = \int_{x_{小}}^{x_{大}} dx \int_{y_{小}}^{y_{大}} (x+y)dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)dy$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

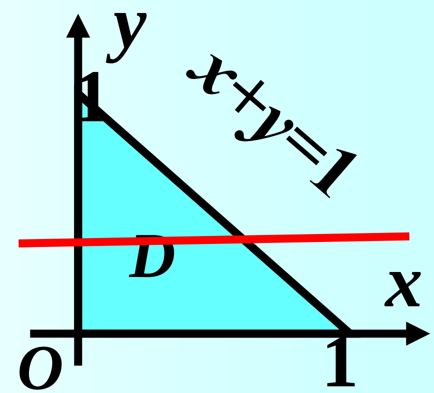
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

哈尔滨工程大学 高等数学

例 2 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中 D 是直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的部分.

解 积分区域如图，

积分次序：先x后y



$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma = \int_{y_{小}}^{y_{大}} dy \int_{x_{小}}^{x_{大}} (x+y)dx$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x+y)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\Big|_{x=0}^{x=1-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)dy = \frac{1}{3}.$$

直角坐标系下二次积分交换积分次序

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\displaystyle\int_{x_{小}}^{x_{大}}dx\int_{y_{小}}^{y_{大}}f(x,y)dy.\\ \displaystyle\int_{y_{小}}^{y_{大}}dy\int_{x_{小}}^{x_{大}}f(x,y)dx.\end{cases}$$

例 4 计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$.

解 由于 $\int e^{y^2}dy$ 无初等原函数,因此积分无法直接计算.

$$\int_{x_{小}}^{x_{大}}dx\int_{y_{小}}^{y_{大}}f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_{y_{小}}^{y_{大}}dy\int_{x_{小}}^{x_{大}}f(x,y)dx$$

给定的二次积分 ⟶ 二重积分 ⟶ 新的二次积分

积分上下限 ⟶ 积分区域的边界曲线 ⟶ 积分上下限

哈尔滨工程大学

高等数学

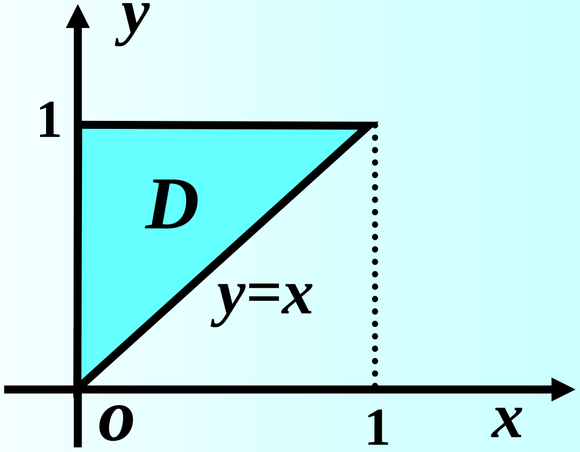
例 5 计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$.

解 由于 $\int e^{y^2}dy$ 无初等原函数,因此积分无法直接计算.

需要交换积分次序。

由给定的积分上下限,
获得积分区域的边界为: $\Rightarrow D: y=1, y=x,$
$x=1, x=0$

画出D的图像:



$$I=\iint_D e^{y^2}dxdy=\int_{y_{小}}^{y_{大}}dy\int_{x_{小}}^{x_{大}}e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}(e-1).$$

特殊题目：积分区域具有对称性

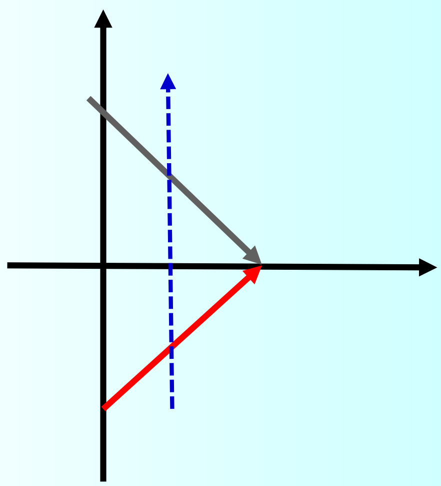
定积分计算，有一个关于积分区间对称的定理，二重积分计算，积分区域若对称将会有何结论？

例6 计算二重积分$\iint_D x^2 y\,dxdy$，其中

$D: y=-x+1, y=x-1, x=0$所围区域

解 画出积分区域的图形，

化二重积分为二次积分



$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-(1-x)}^{1-x} x^2 y\,dy$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_{-(1-x)}^{1-x} y\,dy$$

$$= \int_0^1 0\,dx = 0$$

结论1：对称性

1、二重积分的积分区域D关于x轴上下对称，且

$f(x,-y)=-f(x,y)$,则称函数关于y为奇函数，

则 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$

2、二重积分的积分区域D关于x轴上下对称，且

$f(x,-y)=f(x,y)$,则称函数关于y为偶函数，

则$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$, $D=2D_1$

同理，积分区域D关于y轴左右对称，且函数关于x为奇（偶）函数，亦有相关结论。

结论2：轮换性

可证明，下述等式成立，

$$\iint\limits_{D:\varphi(x,y)=0} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1:\varphi(y,x)=0} f(y,x)d\sigma$$

若有以下现象，则轮换性可简化二重积分计算

$f(x,y)=f(y,x)$或者$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$，

二者只能出现1个。

轮换性可主要用于线面积分的计算

三、极坐标系下二重积分的计算方法

$d\sigma = rdrd\theta$ 称为极坐标系下的面积元素(微元).

所以,直角坐标系下的二重积分化为极坐标系下的二重积分公式为

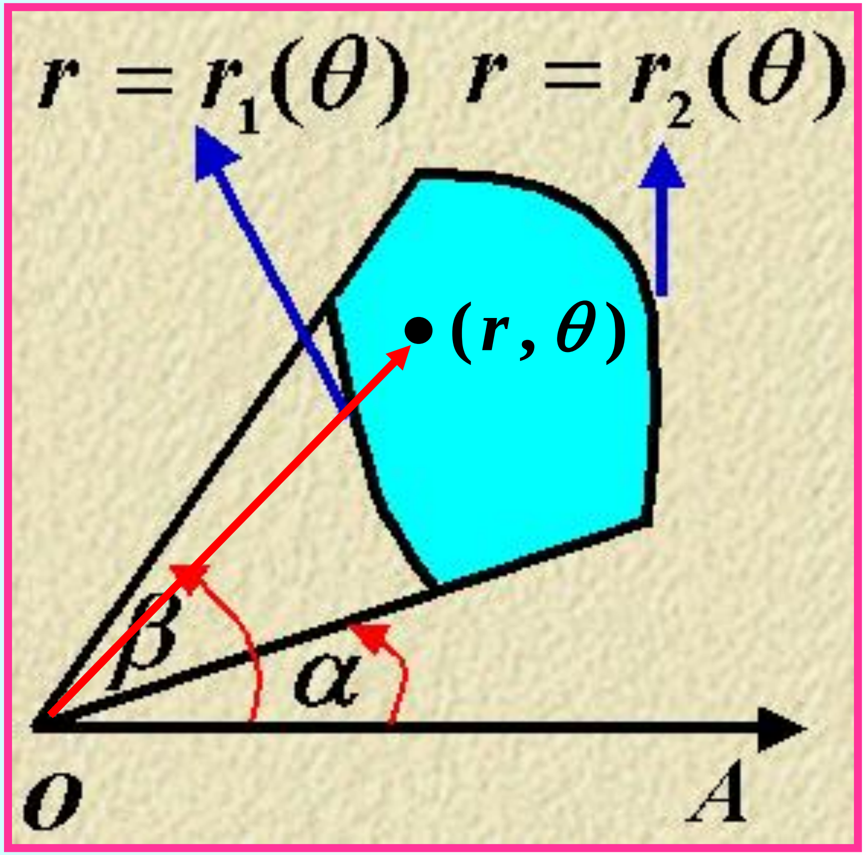
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

则仿照直角坐标系下二重积分的计算方法，得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

$$= \int_{\theta_{小}}^{\theta_{大}} d\theta \int_{r_{小}}^{r_{大}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

如何选取：$r_{大}$，$r_{小}$，$\theta_{大}$，$\theta_{小}$



区域D由4条线围成：

射线$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$

$r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$

则可选取：

$r_{大}=r_2(\theta)$

$r_{小}=r_1(\theta)$

$\theta_{大}=\beta \quad \theta_{小}=\alpha$

在区域D内任选一点，坐标(r,θ)，

极径r可伸缩、摆动，顶点不能移出D

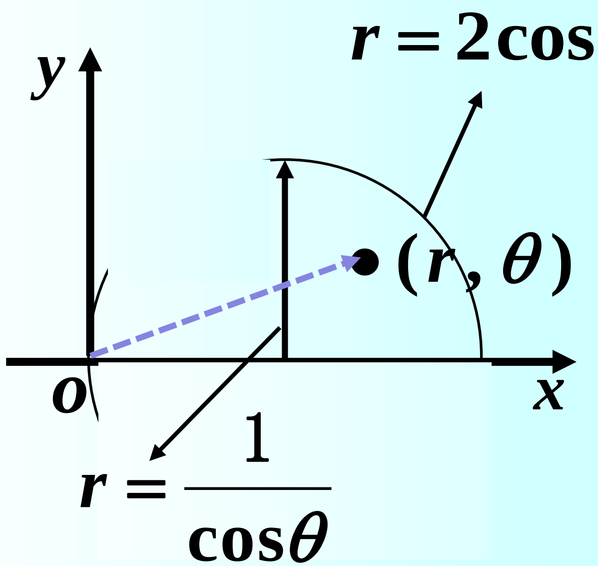
$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.}$$

哈尔滨工程大学

高等数学

化为极坐标 $\iint_D f(x,y)d\sigma \quad D: y=\sqrt{2x-x^2}, y=0, x\geq 1$

解 画出区域D,



将D的边界转化为极坐标形式

$$y=\sqrt{2x-x^2} \to r=2\cos\theta$$

$$x=1 \to r=\frac{1}{\cos\theta}$$

在D内任选点(r,θ), 画一极径

$\forall\theta$，极径r伸缩找$r_{大}$、$r_{小}$,

$\forall r$，摆动找$\theta_{大}$、$\theta_{小}$,

顶点不能移出D

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_{\theta_{小}}^{\theta_{大}}d\theta\int_{r_{小}}^{r_{大}} f\ rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} f\cdot rdr$$

简 单 总 结

1、画出积分区域

2、选定坐标系

3、确定积分次序

4、分割积分区域

5、找出积分上下限

6、计算积分值

②内容介绍

三元函数的三重积分

1，微元法建立数学模型

2，三重积分的计算

- 直角坐标系
  - 先一后二
  - 先二后一
- 柱坐标系
- 球坐标系
- 特点技巧
  - 对称
  - 轮换
  - 变形

一、建立三重积分：数学模型

有一物体在坐标系$Oxyz$占有(空间)有界闭区域V，在$(x,y,z)\in V$的密度为$f(x,y,z)$. 求此物体的质量M?

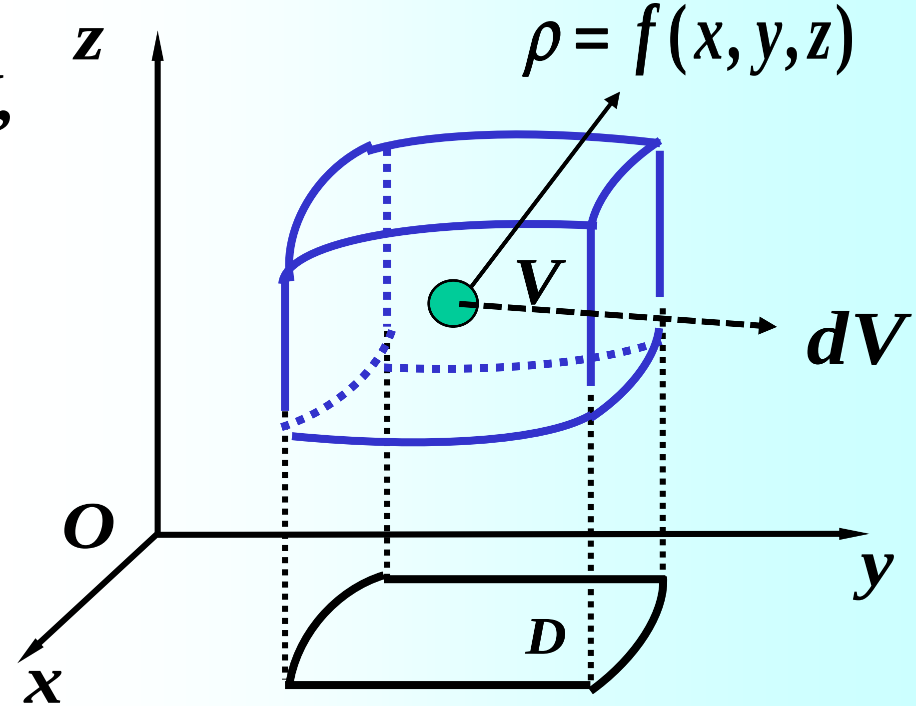
解 我们还用微元法的思想建立数学表达式:

在空间区域内任选小体积dV,

$$dM=\rho dV=f(x,y,z)dV$$

$$M=\int dM=\int f(x,y,z)dV$$

$$M=\iiint_V f(x,y,z)dV.$$



哈
尔
滨
工
程
大
学

高
等
数
学

二、三重积分的计算

1、计算体积给我们的启示

$$m=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$\xrightarrow{f(x,y,z)\equiv 1} m=\iiint_{\Omega} dv=V$$

既有等式：$\iiint_{\Omega} dv = \iint_{D} (z_{大}-z_{小})d\sigma$

启示我们能否将三重积分转化为二重积分？

2、物理意义给我们的启示

三重积分：

空间物体的质量

二重积分：

平面薄片的质量

空间

拍扁

平面

空间物体

体密度

平面薄片

面密度

具体的转化形式:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D} \rho_{面}(x,y)d\sigma$$

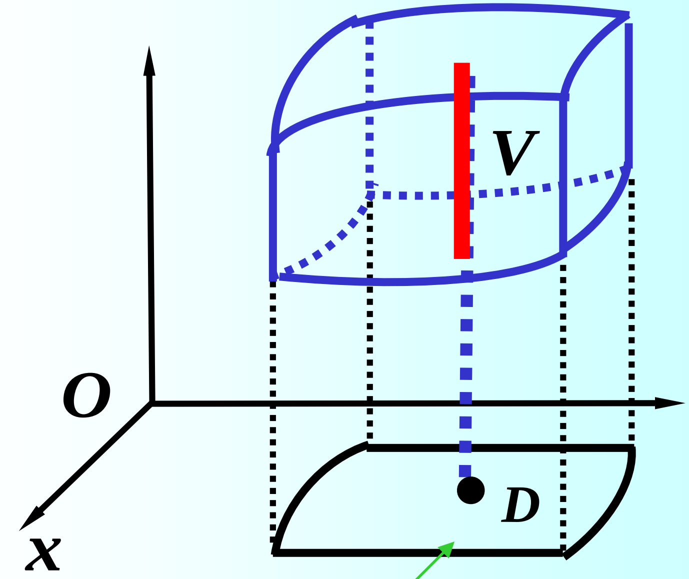
$\rho_{面}(x,y)$ 怎么求得?

假定:点的质量是面密度

空间

拍扁

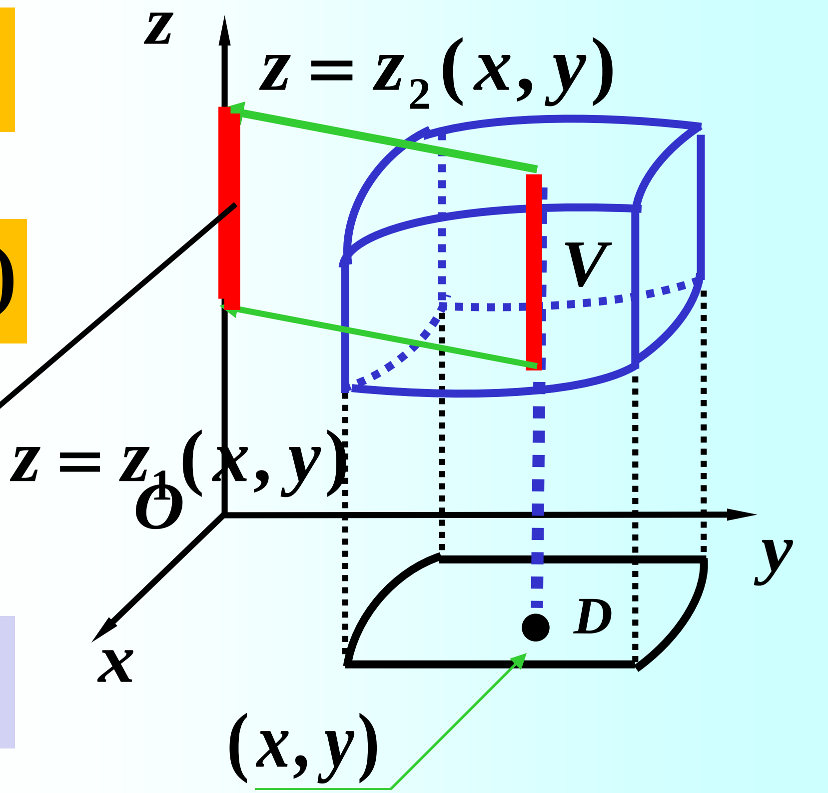
平面



$$\boxed{\rho_{面}} = m(x,y)$$

物理想象：将空间物体V,压成平面薄片D, 任选点（x,y）

红色线段的质量当作点（x,y）处的质量。



虚线与V的上交点 $(x, y, z_{大})$

$$(x, y, z_2(x, y))$$

虚线与V的下交点 $(x, y, z_{小})$

$$(x, y, z_1(x, y))$$

$$m_{杆} = \int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x, y, z)dz$$

视： $m_{杆} = m_{点}(x, y) = \rho_{面}$

求空间物体V的质量M,转化为求平面薄片D的质量M;

$$M = \iint_D \rho_{面} d\sigma = \iint_D m_{杆} d\sigma = \iint_D [\int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x, y, z)dz\,]d\sigma$$

哈尔滨工程大学

高等数学

3、直角坐标系下计算想法

（1）“先一后二”法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{D} d\sigma \int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_{x_{小}}^{x_{大}} dx \int_{y_{小}}^{y_{大}} dy \int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x,y,z)dz$$

怎么选定积分限？

准确的说，就是按照一定的想法，将空间六面体区域V的6个边界曲面，转化为三次积分的6个积分上下限。

哈尔滨工程大学 高等数学

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{x_{小}}^{x_{大}} dx \int_{y_{小}}^{y_{大}} dy \int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x,y,z)dz$$

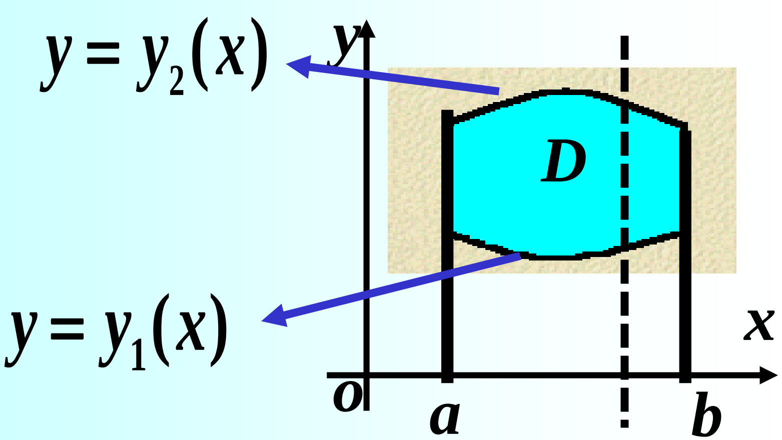
$$= \int_a^b dx \int_{y_{下曲线}}^{y_{上曲线}} dy \int_{z_{下曲面}}^{z_{上曲面}} f\ dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\ dz$$

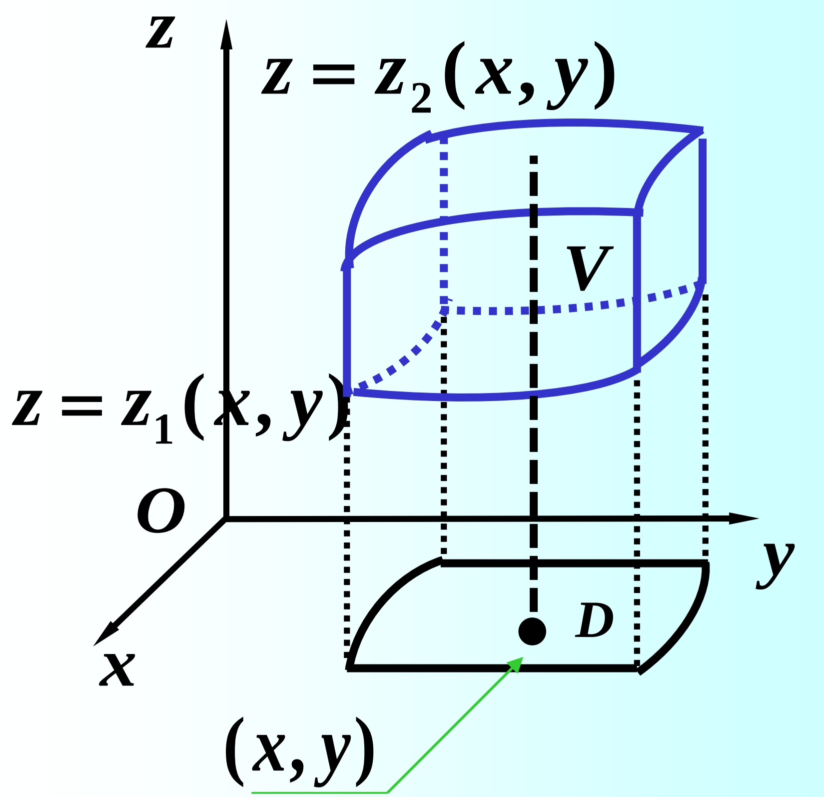
1、画出V的立体图,

2、画出投影D

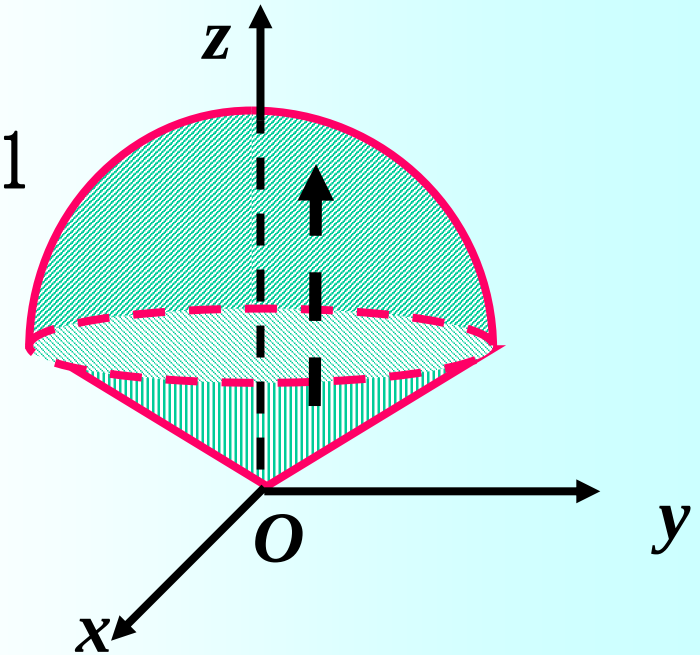
3、平行坐标轴画虚线

4、找上交点，下交点





(1) $\Omega: z=\sqrt{x^2+y^2}, z=\sqrt{2-x^2-y^2}$



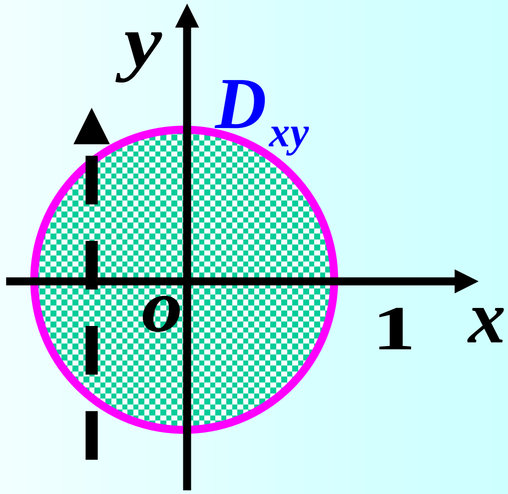
$$L:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=\sqrt{2-x^2-y^2} \end{cases} \quad D_{xy}: x^2+y^2=1$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$=\iint_{D} d\sigma \int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{x_{小}}^{x_{大}} dx \int_{y_{小}}^{y_{大}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f dz$$

$$=\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f dz$$



哈尔滨工程大学

高等数学

4、柱坐标系下计算想法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D} d\sigma\int_{z_{小}}^{z_{大}} f(x,y,z)dz$$

$$=\iint_{D} F(x,y)d\sigma$$

与圆有关

含有$\sqrt{x^2+y^2}$

$$=\iint_{D} F(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta_{小}}^{\theta_{大}} d\theta\int_{r_{小}}^{r_{大}} rdr\int_{z_{小}}^{z_{大}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$

极坐标

计算三重积分：先一后二

$$(x,y,z)\to(r,\theta,z)$$

称之为“在柱面坐标系下计算三重积分”

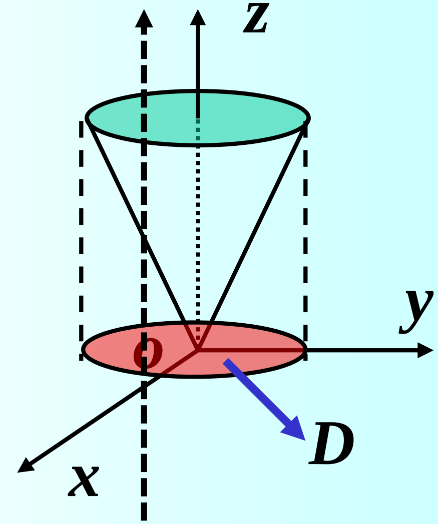
哈尔滨工程大学

高等数学

例 4 计算三重积分 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dv$，其中 V 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成.

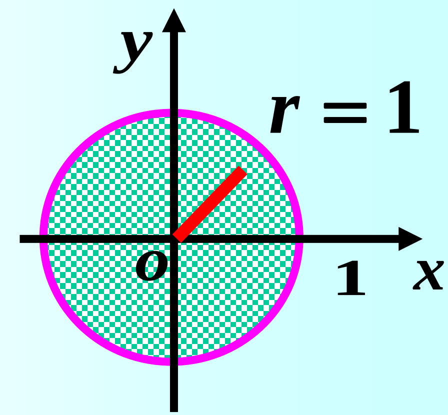
解 如图，V 在 xoy 面上的投影区域

$D: x^2+y^2=1$



$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dv = \iint_D d\sigma \int_{z_{小}}^{z_{大}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

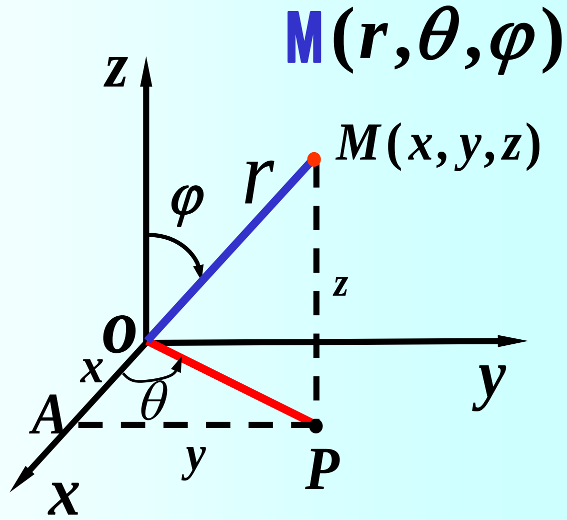
$$= \int_{\theta_{小}}^{\theta_{大}} d\theta \int_{r_{小}}^{r_{大}} r\,dr \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$$



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_r^1 r\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2(1-r)\,dr = \frac{\pi}{6}.$$

5、球坐标系下计算想法



我们将这样的三个数(r,θ,φ)称为点M的球面坐标.

球面坐标与直角坐标的关系为

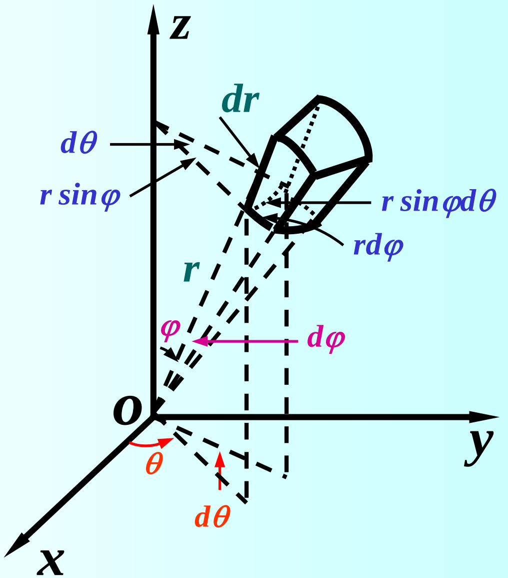
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

$$0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$x^2 + y^2 + z = r^2$$

如图，球面坐标系下的体积微元为

$$dv = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta,$$



因此，我们得到直角坐标系下的三重积分变换为球面坐标系下的三重积分的公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_V f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta.$$

$$= \int_{\theta_{小}}^{\theta_{大}} d\theta \int_{\varphi_{小}}^{\varphi_{大}} d\varphi \int_{r_{小}}^{r_{大}} f \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

哈尔滨工程大学

高等数学

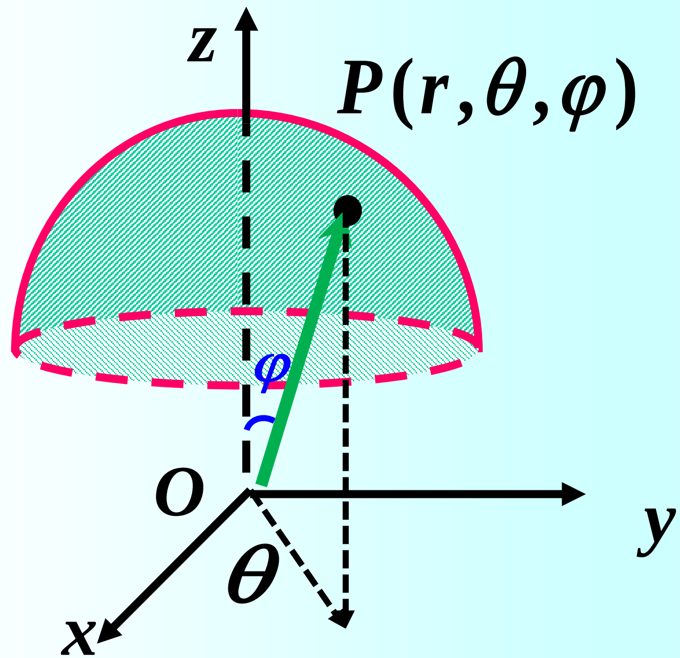
如何找出三次积分的积分限?

如图 $\Omega: x^2+y^2+z^2=2z,\ z\geq 1$

将边界曲面转换为球坐标形式

$$x^2+y^2+z^2=2z, \rightarrow r=2\cos\varphi$$

$$z=1 \rightarrow r=\frac{1}{\cos\varphi}$$



在 Ω 内任选一点 $P(r,\theta,\varphi)$ 连接极径 $OP=r$

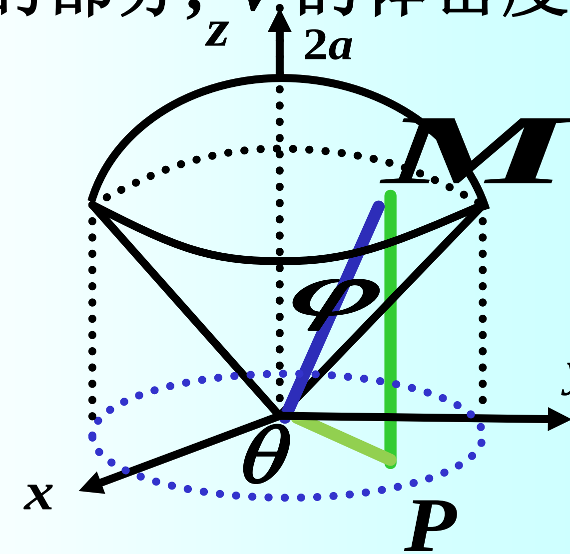
点 $P(r,\theta,\varphi)$ 在 Ω 内有三种移动形式：

伸缩：$r_{大}=2\cos\varphi,\ r_{小}=\dfrac{1}{\cos\varphi}$ 摆动：$\varphi_{大}=\dfrac{\pi}{4},\ \varphi_{小}=0$

旋转：$\theta_{大}=2\pi,\ \theta_{小}=0$

例 4 已知物体占有空间V由球面$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$和锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的含 z轴的部分，V的体密度为$\rho(x,y,z)=z$，求V的质量M.

解 在直角坐标系下画图
将边界曲面方程转化为
球坐标系表示



如图，球面方程为$r=2a\cos\varphi$，

锥面方程为$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

在区域V内任选点$M(r,\varphi,\theta)$

点M在D内伸缩、摆动、旋转；

则$V: 0\le r\le 2a\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\theta\le 2\pi.$

哈尔滨工程大学

高等数学

$$M=\iiint\limits_{V}\rho(x,y,z)dv=\iiint\limits_{V}zdv$$

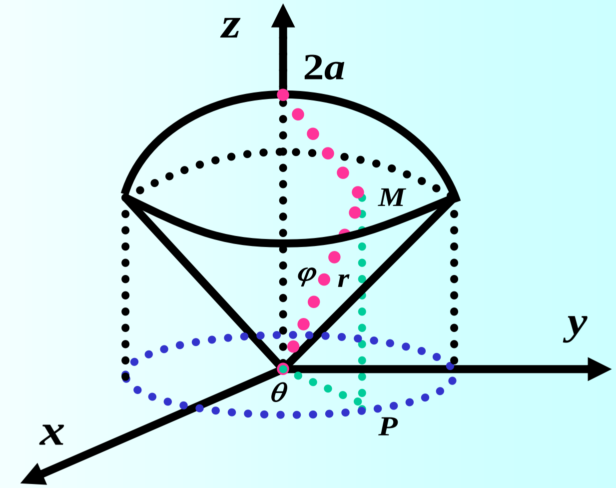
$$=\iiint\limits_{V}r\cos\varphi\cdot r^{2}\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

$$=\int_{\theta_{小}}^{\theta_{大}}d\theta\int_{\varphi_{小}}^{\varphi_{大}}d\varphi\int_{r_{小}}^{r_{大}}r^{3}\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{0}^{2a\cos\varphi}r^{3}\sin\varphi\cos\varphi dr$$

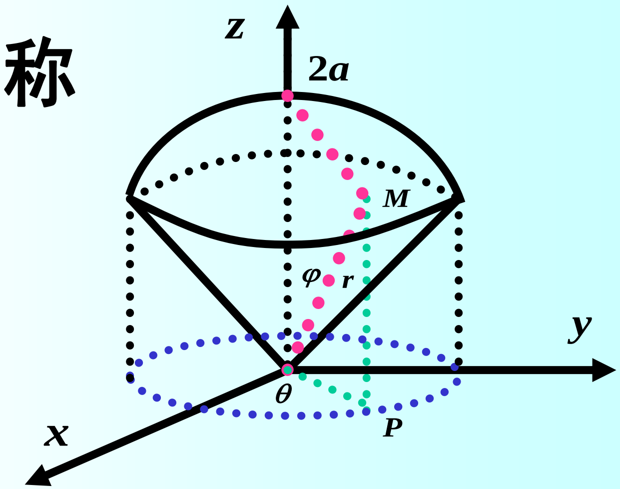
$$=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}r^{4}\sin\varphi\cos\varphi\Big|_{0}^{2\cos\varphi}d\varphi$$

$$=8\pi a^{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^{5}\varphi d\varphi=\frac{7}{6}\pi a^{4}.$$



例 $\iiint\limits_{v}(xz+yz)dv \quad V: x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}$

解　画图，可见V关于xoz，yoz对称



$$\iiint\limits_{v}(xz+yz)dv$$

$$=\iiint\limits_{v}xzdv+\iiint\limits_{v}yzdv=I_1+I_2$$

如图，可见V关于yoz面对称　$I_1=0$

如图，可见V关于xoz面对称　$I_2=0$

$$\iiint\limits_{v}(xz+yz)dv=0$$

讲座（三）　　曲线积分

此例题的警示：对称性失效！

此例题的警示：对称性失效！

第一型曲线积分	第二型曲线积分
背景　曲线段质量	背景　变力沿曲线路径做功
表达式：$\int_L f(x,y)ds$	表达式：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
常规算法：曲线方程代入，	常规算法：曲线方程代入，
技巧算法：对称 轮换	技巧算法：格林公式， 等价条件，
应用题：找质点 质心坐标，转动惯量，	应用题：找力的矢量

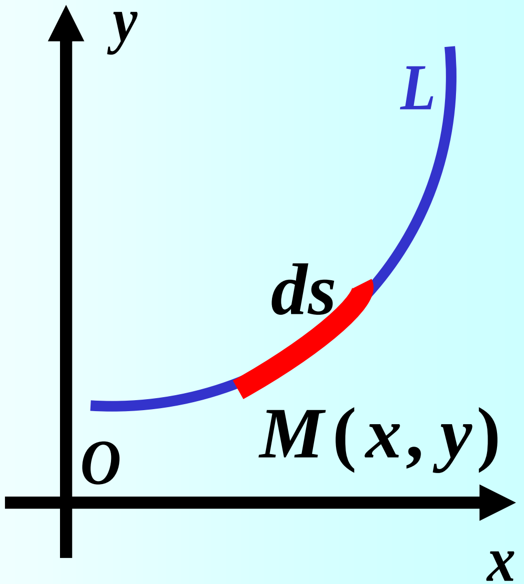
一、第一型曲线积分的背景与性质

1、实际问题

在 xOy 坐标系内有一条光滑曲线

$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

其上分布有质量，在(x,y)处的线密度为 $f(x,y)$, 求曲线段的质量m.



2、数学问题

规则问题： 线段质量m=长度×线密度

微元法： $dm = f(x,y)ds \quad ((x,y) \in L)$

曲线段的质量 $m = \int dm = \int_L f(x,y)ds$。

哈尔滨工程大学

二、对弧长的曲线积分的基本计算方法

1.回顾与分析:

已知 定积分 $\int_a^b f(x)\,dx = A$ 积分号，变量个数.

问题 求积分 $m = \int_L f(x,y)ds$ 积分号，变量个数?

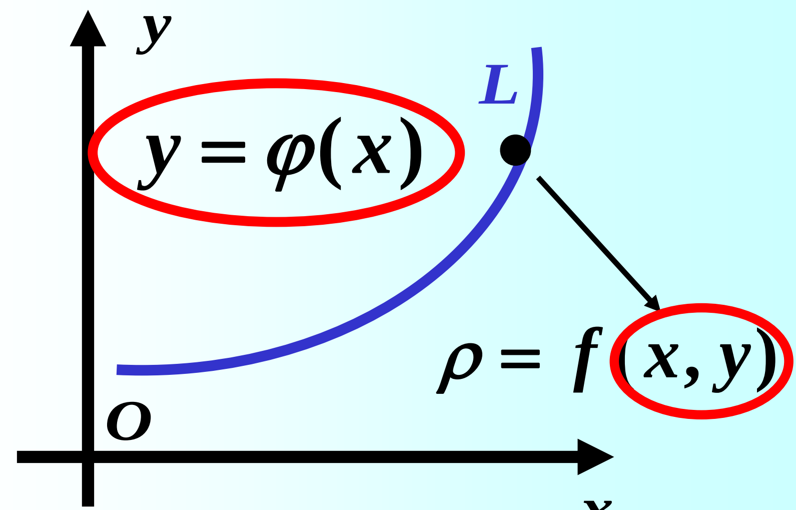
2.解决方案:

积分号个数=变量个数!

被积函数的自变量个数想办法变成1个。

高等数学

3、具体方法:



$$\int_{L:\ y=\varphi(x)} f(x,y)ds$$

$$=\int_{L:\ y=\varphi(x)} f(x,\varphi(x))ds$$

曲线方程代入，消去变量;

$$=\int_{L:\ y=\varphi(x)} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx$$

曲线方程代入，统一变量;

$$=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx$$

曲线方程投影，定积分限;

4、定理：基本方法（官方说法）

设$f(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数,且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分$\int_L f(x,y)ds$存在,

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

$$(\alpha < \beta)$$

推广引申:

如L: $r=r(\theta)$, $(\alpha\leq\theta\leq\beta)$,**则**

$$x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta$$

$$\int_L f(x,y)ds$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

空间曲线Γ: $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

$$(\alpha<\beta)$$

5、计算程序（民间口语）：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_L f(\varphi(t),\psi(t))ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$$

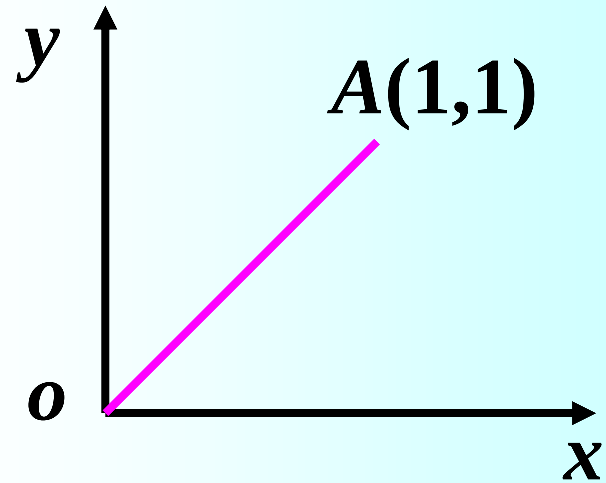
化为对参数 t 的定积分，“一代二换三定限”

“一代”：将 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$代入被积函数$f(x,y)$;

“二换”：将ds换成 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

“三定限”： 积分下限一定小于上限。

例1 $\oint_L \sqrt{xy}ds$，其中 $L: y = x$ 介于 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 之间的线段。



解 $I = \oint_L \sqrt{xy}ds$

$$= \oint_L \sqrt{x \cdot x}ds = \oint_L \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2}dx$$

$$= \int_0^1 |x| \cdot \sqrt{1 + 1^2}dx = \sqrt{2}\int_0^1 xdx$$

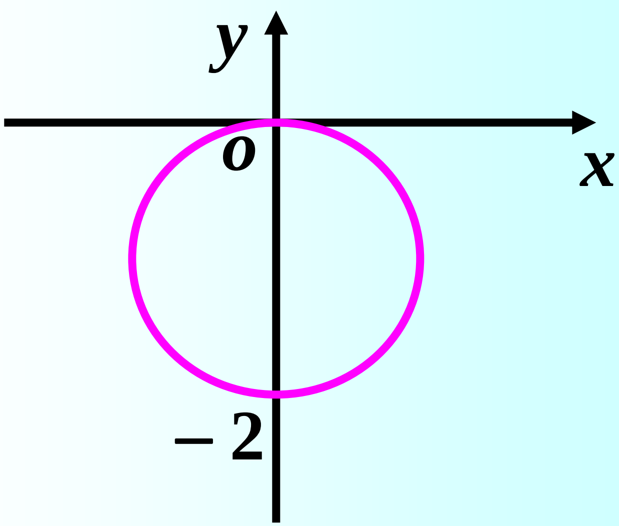
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例3 计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, $L: x^2+y^2=-2y$所围区域的边界。

解 $L: x^2+y^2=-2y$

L的极坐标方程为

$$r=-2\sin\theta \quad (\pi \le \theta \le 2\pi)$$



$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$$

$$=\int_\pi^{2\pi}(-2\sin\theta)\sqrt{(-2\sin\theta)^2+(-2\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=-4\int_\pi^{2\pi}\sin\theta d\theta \quad =8。$$

例5 计算曲线积分

$$\int_{\Gamma}\sqrt{2y^2+z^2}\,ds,\text{其中}\Gamma:\text{球面}x^2+y^2+z^2=a^2$$

与平面$x=y$的交线。

解 基本算法：代入曲线方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x=y \end{cases}$$

此空间曲线的参数方程?

空间曲线$\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$

求空间曲线的参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

投影

$$L: H(x,y)=0$$

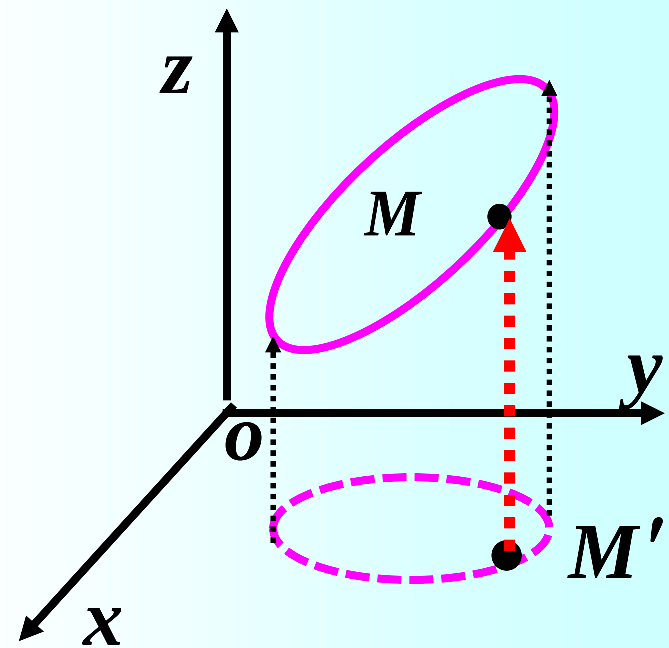
转化

$$x=x(t),\ y=y(t)$$

代入

点$M(\boxed{x,y,}z)\in\Gamma$

投影点$M'(\boxed{x,y,}0)\in L$



求得：$z=z(t)$

例5 $\int_{\Gamma}\sqrt{2y^2+z^2}ds$,其中$\Gamma$:球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x=y$的交线。

解 先求交线Γ的参数方程:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x=y \end{cases}$

$$\Rightarrow 2y^2+z^2=a^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t \\ z=a\sin t \end{cases},(0\le t\le 2\pi)$$

$$\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, y=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, z=a\sin t, (0\le t\le 2\pi)$$

$$\therefore ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt = adt$$

$$\int_{\Gamma}\sqrt{2y^2+z^2}ds=\int_0^{2\pi}a\cdot adt=2\pi a^2。$$

哈尔滨工程大学 高等数学

2、对称性

1、$f(x,-y)=-f(x,y)$

且L关于x轴上下对称

则$\int_L f(x,y)ds=0$

2、$f(-x,y)=-f(x,y)$

且L关于y轴左右对称

则$\int_L f(x,y)ds=0$

例 计算$\oint_L (x+y)^2 ds$,其中$L: x^2+y^2=1$

解： $\oint_L (x+y)^2 ds = \oint_L (x^2+y^2)ds + \oint_L 2xyds$

$= \oint_L 1\cdot ds + 0 = \oint_L ds = 2\pi$

哈尔滨工程大学

高等数学

3、轮换性

$$\int_{L:\ \varphi(x,y)=0} f(x,y)ds = \int_{L_1:\ \varphi(y,x)=0} f(y,x)ds$$

例 计算 $I=\oint_L x^2 ds$,其中$L: x^2+y^2=1$

解: $I=\oint_L x^2 ds=\oint_{L_1} y^2 ds \qquad L_1: y^2+x^2=1$

显然，$L=L_1$

$$I=\frac{1}{2}\left(\oint_L x^2 ds+\oint_{L_1} y^2 ds\right)=\frac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)ds \quad =\pi$$

特点

1、被积函数出现于曲线方程　利用曲线方程简化

2、曲线方程中变量地位平等　被积函数可以合并

哈尔滨工程大学

高等数学

例 计算$\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds$,其中$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

原式$=\oint_L 1\cdot ds \Leftarrow$代入$x^2+y^2+z^2=1$

$=\oint_L ds = S_L \quad = 2\pi$

练习 计算$\oint_L x^2 ds$,其中$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

哈尔滨工程大学

高等数学

练习 计算$\oint_L x^2 ds$,其中$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解 **利用轮换性**

$$I=\oint_L x^2 ds=\oint_{L_1} y^2 ds=\oint_{L_2} z^2 ds$$

$$L_1:\begin{cases} y^2+x^2+z^2=1 \\ y+x+z=0 \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} z^2+y^2+x^2=1 \\ z+y+x=0 \end{cases}$$

$$L=L_1=L_2$$

$$I=\oint_L x^2 ds=\frac{1}{3}\left(\oint_L x^2 ds+\oint_{L_1} y^2 ds+\oint_{L_2} z^2 ds\right)$$

$$=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2) ds=\frac{1}{3}\oint_L ds=\frac{2\pi}{3}$$

哈尔滨工程大学

例. 计算 $\int_\Gamma (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解: 利用轮换对称性, 有

$$\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma x\ \mathrm{d}s=\int_\Gamma y\ \mathrm{d}s=\int_\Gamma z\ \mathrm{d}s$$

高等数学

$\therefore$ 原积分$=\dfrac{2}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+\dfrac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)\mathrm{d}s$

$$=\frac{2}{3}a^2\int_\Gamma \mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi a^3$$

课堂练习:

计算 $\oint_L (xy+yz+zx)ds$,其中$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解 $\oint_L (xy+yz+zx)ds = \dfrac{1}{2}\oint_L [(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]ds$

计算 $\oint_L x^2 ds$,其中$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=z \end{cases}$

不能轮换:y=z,系数不一样。

哈尔滨工程大学 高等数学

计算 $I=\oint_L x^2 ds$，其中 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ \boxed{y=z} \end{cases}$

解 不能利用轮换性

$$I=\oint_L x^2 ds=\oint_{L_1} y^2 ds=\oint_{L_2} z^2 ds$$

$$L_1:\begin{cases} y^2+x^2+z^2=1 \\ \boxed{x=z} \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} z^2+y^2+x^2=1 \\ \boxed{y=x} \end{cases}$$

$$L\neq L_1\neq L_2$$

$$I=\oint_L x^2 ds=\frac{1}{3}\left(\oint_L x^2 ds+\oint_{L_1} y^2 ds+\oint_{L_2} z^2 ds\right)$$

$$\neq\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds$$

找曲线参数方程

课堂练习:

$$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ 转化为曲线参数方程

$$H(x,y)=0: x^2+y^2+(-x-y)^2=2$$

$$l: x^2+y^2+xy=1$$ 令: $x=u+v, y=u-v$

$$(u+v)^2+(u-v)^2+(u+v)(u-v)=1$$

$$3u^2+v^2=1 \quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, v=\sin t, (0\le t\le 2\pi)$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t+\sin t,\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t-\sin t, z=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, (0\le t\le 2\pi)$$

第二型曲线积分

一、对坐标的曲线积分的概念

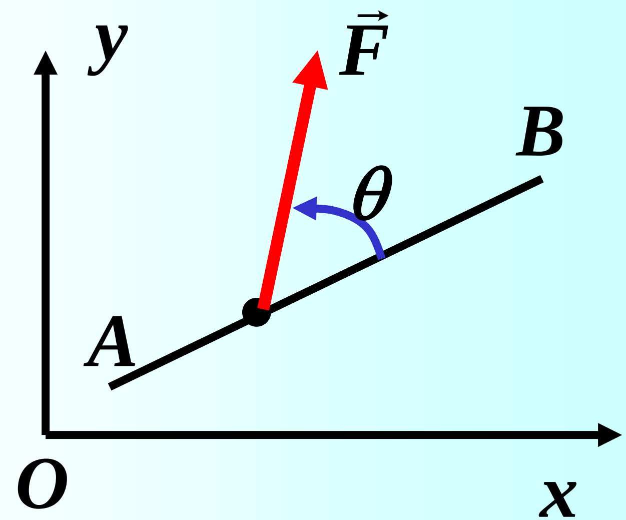
1、理想化的实例：常力沿直线做功

问题 在 xOy 坐标系内有一条直线 L，一个端为 A 另一个端为 B. 设有一个质点在力 F 的作用下沿着直线从 A 端移动至 B 端，求在此移动过程中力 F 对质点所作的功 W.

解 若常力 $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j}$，且 L 为直线段 AB，则

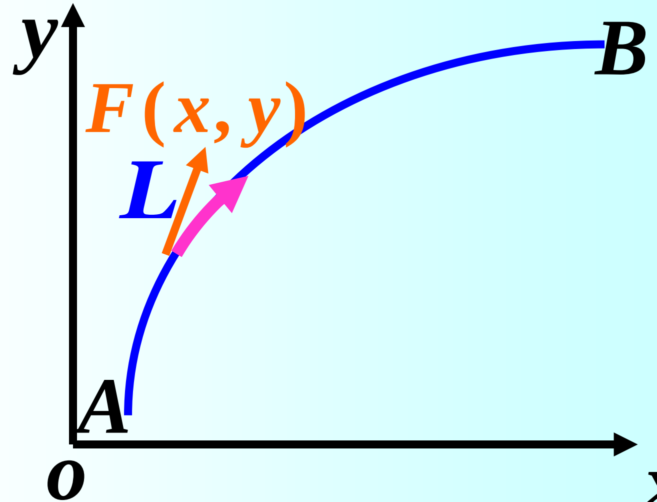
$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\theta = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

物理公式：$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$.



2、客观实际问题：变力沿曲线作功

设一个质点在xOy面内从点A沿光滑曲线弧L移动到点B。



在移动过程中，这质点受到力

$$F(x,y) = P(x,y)\, i + Q(x,y)\, j$$

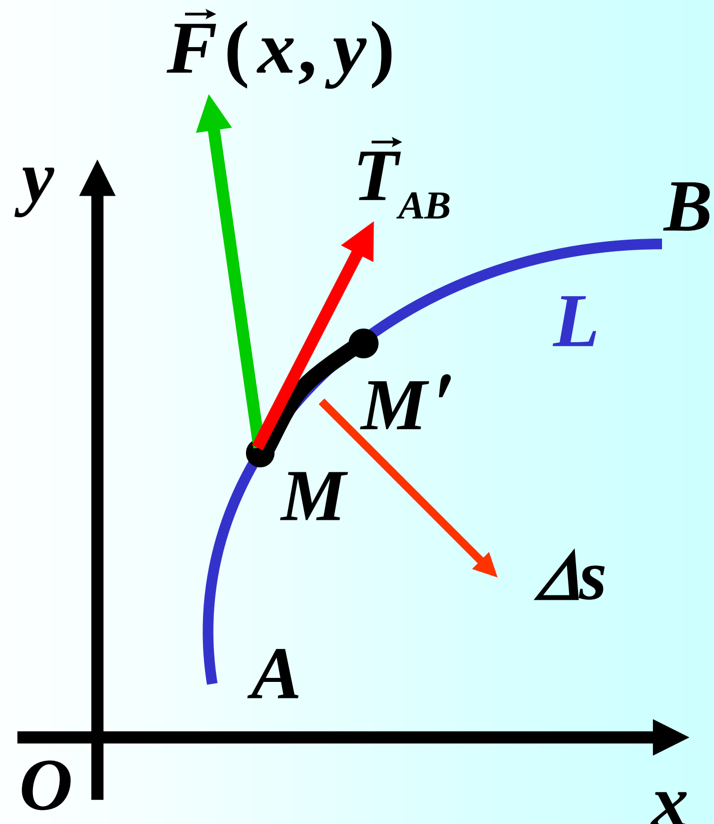
的作用，其中函数P、Q在L上连续。

要计算在上述移动过程中变力$F(x,y)$所作的功

物理公式：$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$ 无法使用.

不规则问题，利用规则问题近似求解。

3、微元法建立数学模型



在L上任选一点$M(x,y)$，又在M的前方另选一点M'，曲线上MM'弧的长为Δs.

令 $\vec{T}_{AB}=\vec{T}_{AB}(x,y)$ 为曲线在M点由A走向B的单位切向.

当Δs很小时，则 $\overrightarrow{MM'}\approx \Delta s\vec{T}_{AB}=\overrightarrow{ds}$

即微小曲线弧长等于切线的长度

再视$\vec{F}(x,y)$在MM'弧上不变.

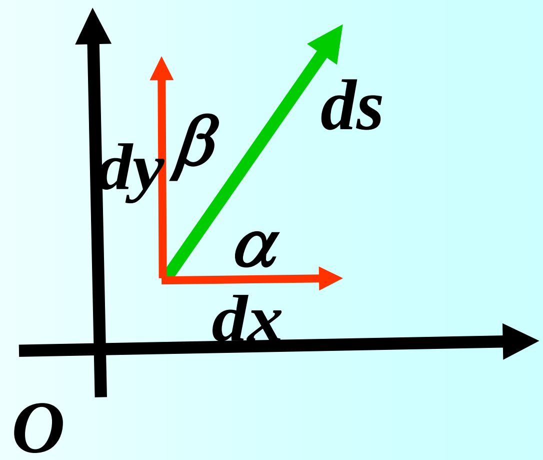
$$dW=\vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$F(x,y) = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j \qquad \overrightarrow{ds} = dx \cdot i + dy \cdot j$$

功W的微元 $\quad dW = \vec{F}(x,y)\cdot \overrightarrow{ds}$

$$dW = \{P(x,y),\ Q(x,y)\}\cdot\{dx, dy\}$$

$$= P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$



$$W = \int dW = \int_L [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$$

$$= \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

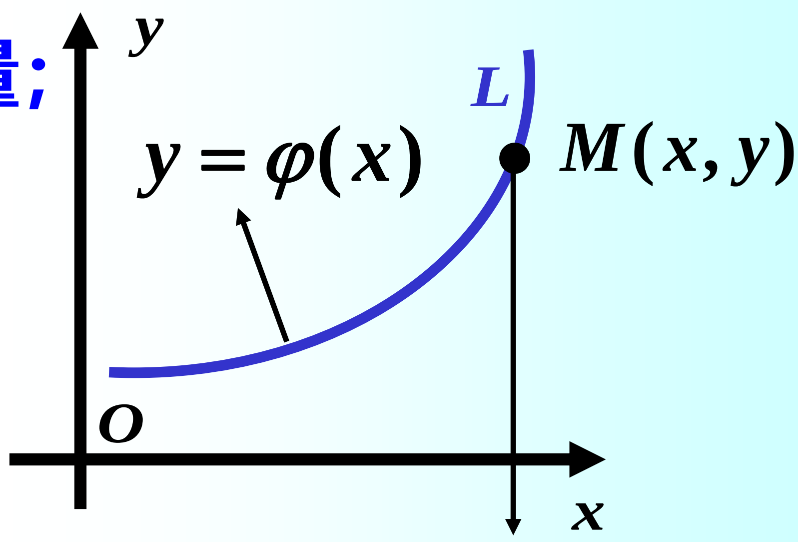
称为函数$f(x,y)$在曲线弧L上对坐标的曲线积分或第二类曲线积分。

二、对坐标的曲线积分的计算

$$W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

要求： 被积函数自变量个数===积分变量维数

必然需要：
曲线方程代入，消去变量；



$$P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

定理9.1.2: 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义，且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t:\alpha\to\beta,$$

则曲线积分 存在, 且有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

计算方法:

化为对参数的定积分，“一代二换三定限”

“一代”：将$x=\varphi(t), y=\psi(t)$代入被积式。

“二换”：将dx换成$\varphi'(t)dt, dy$换成$\psi'(t)dt$

“三定限”：下限$\alpha\to$起点，上限$\beta\to$终点，不一定有$\alpha<\beta$。

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta)$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]d\varphi(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]d\psi(t)\}$$

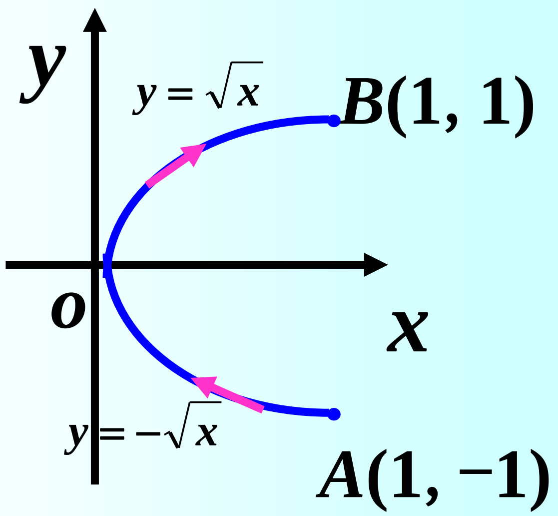
$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为

L:抛物线$y^2 = x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$;

解法1　化为对x的定积分,

$y = \pm\sqrt{x}$.　表明有2条曲线



所以把L分为AO和OB两部分。

在AO上,$y = -\sqrt{x}$, x从1变到0;

在OB上,$y = \sqrt{x}$, x从0变到1。

$$\int_L xydx = \int_{AO} xydx + \int_{OB} xydx$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x\sqrt{x}dx = 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}。$$

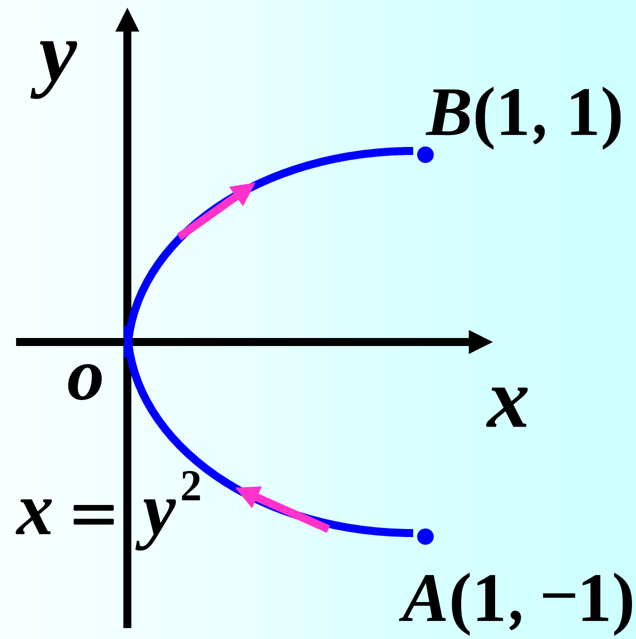
解法2　化为对y的定积分来计算。

现在$x = y^2$，从－1变到1。

$$\int_L xydx = \int_{-1}^{1} y^2 y(y^2)'dy$$

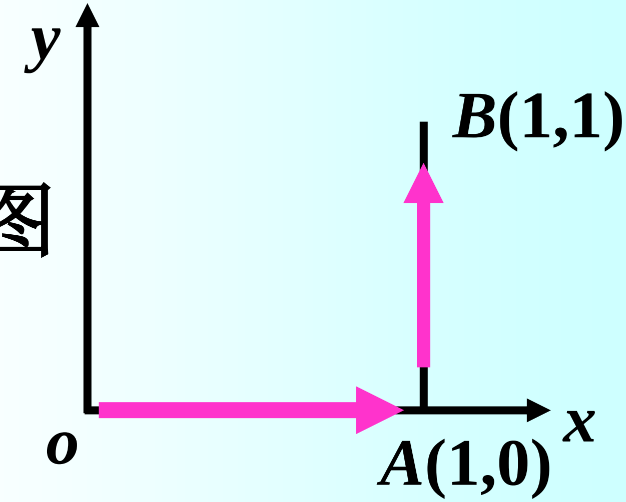
$$= 2\int_{-1}^{1} y^4 dy$$

$$= 2[\frac{y^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}。$$



此例题的警示：对称性失效！

例2 计算 $\int_L 2xydx + x^2dy$，L如图



解 $L = \overline{OA} + \overline{AB}$

$$\text{原式} = \int_{\overline{OA}} 2xydx + x^2dy + \int_{\overline{AB}} 2xydx + x^2dy$$

在OA上，$y=0$，x从0变到1，所以

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2x\cdot 0dx + x^2\cdot 0 = 0。$$

在AB上，$x=1$，y从0变到1，所以

$$\int_{\overline{AB}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2y\cdot 0 + 1dy = 1。$$

$$\therefore \int_L 2xydx + x^2dy = 1$$

例3 $\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$,其中$\Gamma$是从点$A(3,2,1)$到点$B(0,0,0)$的直线段$AB$。

解 $\Gamma_{AB}: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 化为参数方程得

$x=3t$，$y=2t$，$z=t$，t从1变到0

$$\int_\Gamma x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz。$$

$$=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t]dt$$

$$=87\int_1^0 t^3dt=-\frac{87}{4}。$$

四、第二类曲线积分的技巧计算：格林公式

设闭区域D由分段光滑的曲线L围成,函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L Pdx+Qdy=\pm\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

应用格林公式的题型：

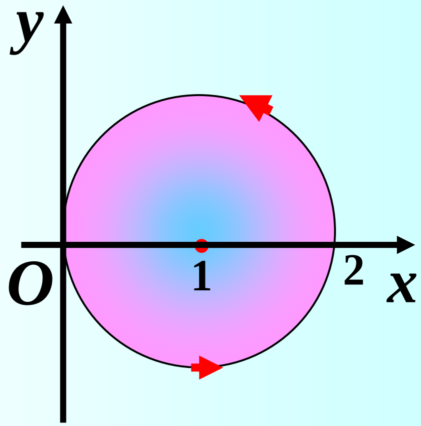
1. 封闭曲线L，
2. 非封闭曲线L，直接代入计算麻烦
3. 封闭曲线L，偏导数在D内不连续
4. 其他

(1) 封闭曲线的积分

例3 计算$I=\oint_L e^y\mathrm{d}x+(xy^3+xe^y-2y)\mathrm{d}y,$

其中L为圆周 $x^2+y^2=2x$ 的正向.

解 $P=e^y,\ Q=xy^3+xe^y-2y$



$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y^3+e^y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^3$$

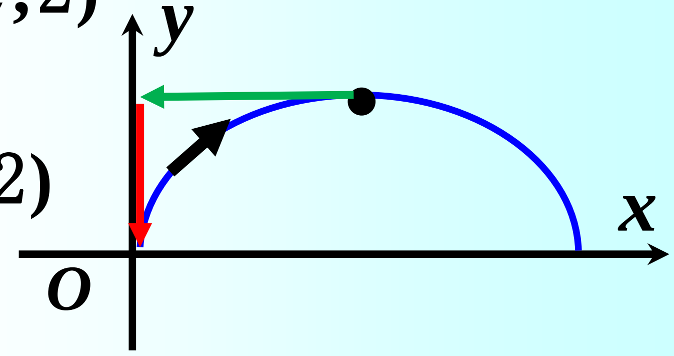
对称性

由格林公式有 $I=\iint_D y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

(2) 非封闭曲线的积分

例5 计算 $\int_L (2xy+3x\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$

其中 $L:\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0,0)\to(\pi,2)$



解 添折线 $L_1: y=2, (\pi,2)\to(0,2)$

$L_2: x=0, (0,2)\to(0,0)$

$$\int_L (2xy+3x\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$$

$$=\left(\int_L+\int_{L_1}+\int_{L_2}\right)-\int_{L_1}-\int_{L_2} \qquad =\oint_{L+L_1+L_2}-\int_{L_1}-\int_{L_2}$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma-\int_{L_1}(2xy+3x\sin x)dx \quad -\int_{L_2}(x^2-ye^y)dy$$

$$=0-\int_\pi^0(2x\cdot 2+3x\sin x)dx \quad -\int_2^0(0-ye^y)dy$$

(3) 封闭曲线、偏导数不连续

题型

计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{a^2x^2+b^2y^2}$，其中$L$:不过原点闭合曲线

$$P(x,y)=\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2},Q(x,y)=\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{b^2y^2-a^2x^2}{(a^2x^2+b^2y^2)^2}。$$

即P,Q在全平面上除去原点(0,0)的复连通区域内,均成立

设 $L_1: x^2+y^2=1, L_2: x^2+y^2=2, L_3: x^2+2y^2=2, L_4: 2x^2+y^2=2$

为四条逆时针方向的平面曲线，

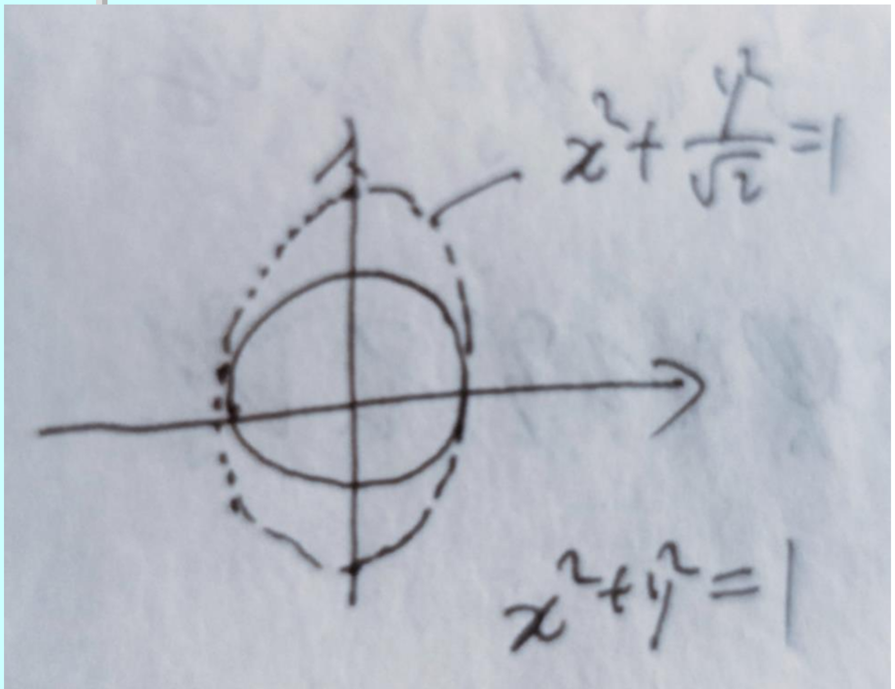
记 $I_i=\oint_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，

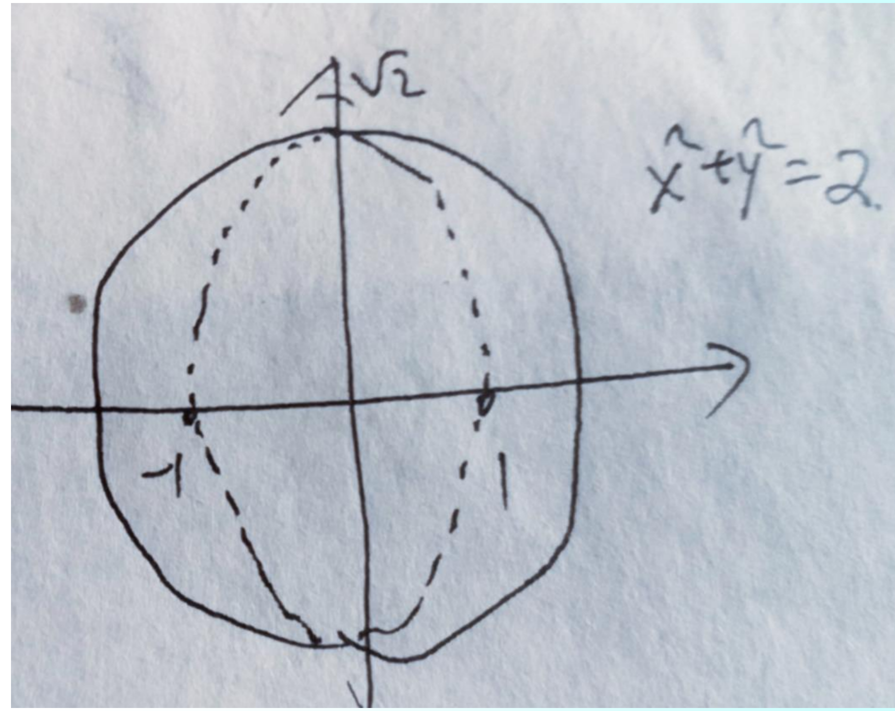
则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

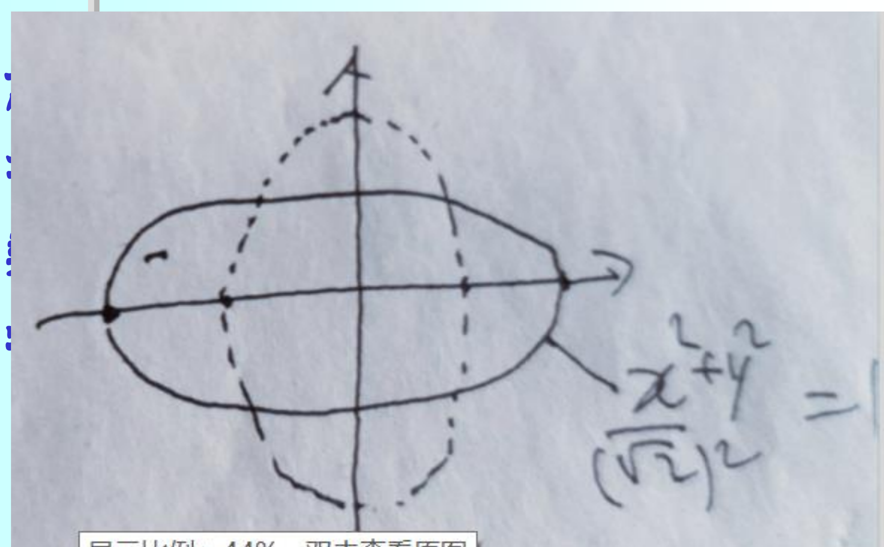
$$I_i=\iint_{D_i}(1-x^2-\frac{1}{2}y^2)d\sigma$$

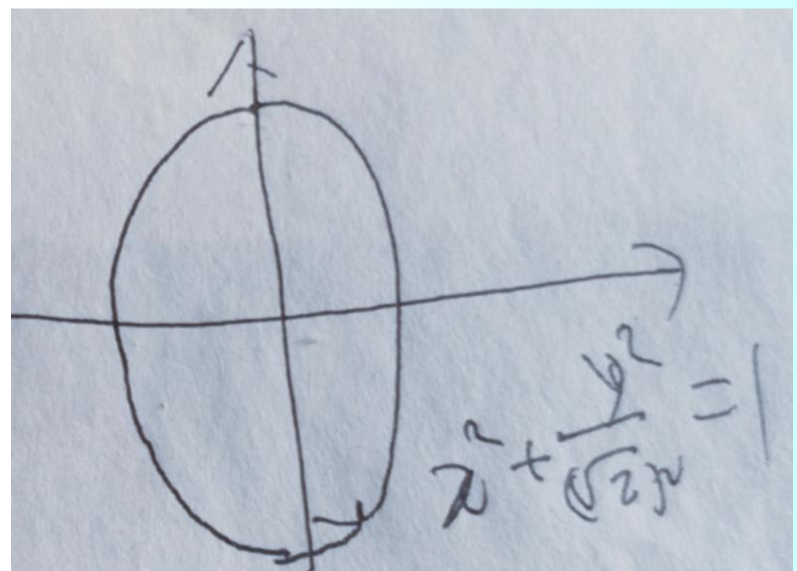
哈尔滨工程大学

高等数学


$x^2+\frac{y^2}{\sqrt{2}}=1$
$x^2+y^2=1$


$\sqrt{2}$
$x^2+y^2=2$
-1
1


$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+y^2=1$
显示比例：44% 双击查看原图


$x^2+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

哈尔滨工程大学

高等数学

思考题

确定闭曲线 C，使曲线积分

$$\oint_C \left(x+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)dy$$ 达到最大值.

答案

$$L: 1-2x^2-y^2=0$$

五、第二类曲线积分的应用题

力$F(x,y)=P(x,y)\,i+Q(x,y)\,j$沿路径L移动做功

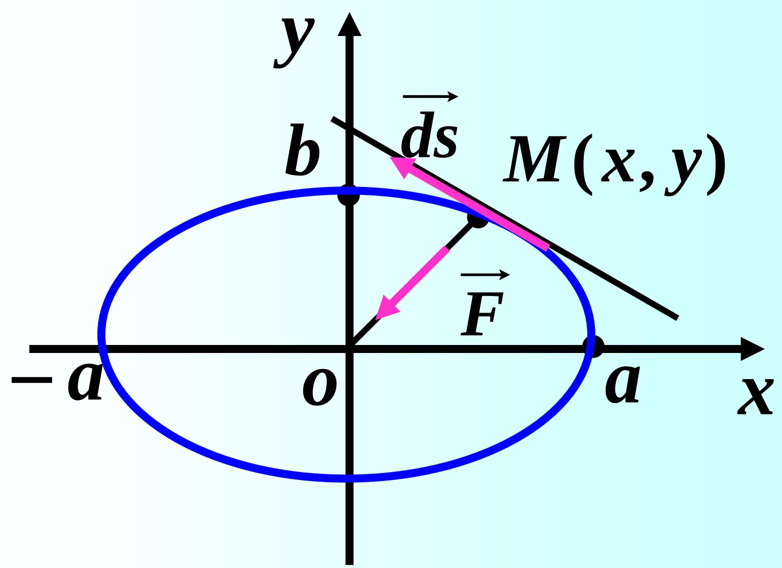
$$W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

1、找出力F的大小

2、找出力F的方向

在椭圆$x = a\cos t, y = a\sin t$ 上每一点$M(x,y)$处受到力F的作用，F的大小与M到原点O的距离成正比，F的方向恒指向椭圆的中心。

1、计算质点P沿椭圆点由点$A(a,0)$按逆时针方向移动到点$B(0,b)$，求力F 所作的功W。



2、计算质点P逆时针方向走遍全部椭圆时，力F 所作的功W。

变力$F(x,y) = P(x,y)\ i + Q(x,y)\ j$ 在曲线弧L上移动*所作的功*。

$$W = \int dW = \int_L [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$$

3. 设 $L: x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\oint_L (xy+x^2+y^2)\mathrm{d}s =$ __A__.

(A) 2π　　(B) π　　(C) 0　　(D) $-\pi$

尔
滨
工

设 $I=\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$，其中 $L: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，且周长为 a，则 $I=$ ____

学

质点在变力 $\vec{F}(x,y,z)=-yz\vec{i}+xz\vec{j}+z\vec{k}$ 作用下沿螺旋线 $\Gamma: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases}$ 从点 $M_1(1,0,0)$ 运动到点 $M_2(-1,0,\pi)$，则变力 $\vec{F}$ 所作的功为___ π^2 ____

预祝

同学们

考试成功