10.6

例1 设f(x)是以2π为周期的函数，它在[-π, π)上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\pi\\ -1 & -\pi\le x<0\end{cases}$$

，将f(x)展为Fourier级数

例2：设f(x)是以2π为周期的函数，它在[-π, π)上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<\pi\\ -x & -\pi\le x<0\end{cases}$$

，将f(x)展为Fourier级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

练习：1. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$

则其Fourier级数在$x=\pi$收敛于______

2. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=2x$，将$f(x)$展为Fourier级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其系数$a_5=$______

3. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$，试将$f(x)$展为Fourier级数.

10.7：

例：将$f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$分别展为正弦级数与余弦级数

练习：将$f(x)=|x|$，$\forall x\in[-\pi,\pi]$展为以2π为周期的Fourier级数.

10.8:

例11：设$f(x)$是周期为4的函数，它在$[-2,2)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$$，将其展为周期为4的Fourier级数

例12：将$f(x)=10-x\ (5<x<15)$展开成周期为10的Fourier级数

练习：1. 将 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 2)$ 展为周期为4的余弦级数，并求 $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$ 的和

2. $f(x)=x-1,\ x\in(1,3]$，其Fourier级数的和函数 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$，

则 $S(-7)=$ ______.

上次课总结：1. Euler公式：

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

2. 周期为2π的函数的 Fourier 级数展开式：

① 画两个周期的图形，找$(-\infty,+\infty)$上的间断点……

② $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) = \begin{cases} \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为间断点} \\ f(x) & x\text{为连续点} \end{cases}$$

注 $(-\pi,\pi)$上奇函数$f(x)$没有余弦项，即$a_n=0$，$n=0,1,2,\cdots$

$(-\pi,\pi)$上偶函数$f(x)$没有正弦项，即$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$

上次课总结：1、非周期函数展开为周期为2π

的Fourier级数：

①余弦级数：$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$n=1,2,\cdots$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad 0\le x\le\pi$$

②正弦级数：$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ $n=1,2,\cdots$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

注 给半个周期的函数，Fourier级数不唯一.

给一个周期的函数，Fourier级数唯一.

2. 周期函数展开为周期为$2l$的Fourier级数：

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases}\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为间断点}\\[2ex] f(x), & x\text{为连续点}\end{cases}$$

3. 非周期函数展开为周期为 $2l$ 的 Fourier 级数:

计算 a_0, a_n, b_n, $n=1,2,\cdots$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

※标上收敛域的范围