哈尔滨工程大学
Harbin Engineering University

学业帮扶进书院•数学研学小讲堂系列讲座

工科数学分析（二）

——多元函数微分学

柴艳有

主办单位：数学科学学院 公共数学教研部

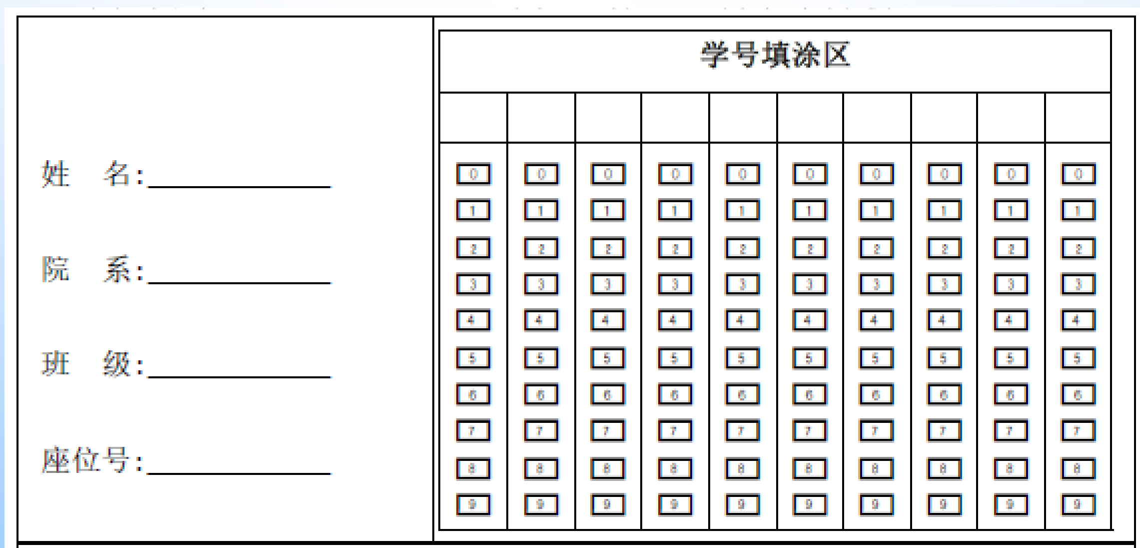
协办单位：海岳书院、求理书院、求是书院、求新书院、至诚书院、至工书院、至善书院、至学书院

哈尔滨工程大学
Harbin Engineering University

期中考试

一、单项选择题（每小题7分, 共70分）

二、填空题（每小题6分, 共30分）


姓　名:____________

院　系:____________

班　级:____________

座位号:____________

学号填涂区

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

制作人:　柴艳有

考试范围

- 多元函数微分学
- 多元函数积分学（微积分教程7.1-9.4节，不包含7.9和8.6）

第一部分

多元函数微分学知识点总结

制作人：柴艳有

1. 多元函数极限与连续

(1) 多元函数极限的定义

$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$， 当$0<|PP_0|<\delta$时， 有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

(2) 连续

1) 函数$f(P)$在P_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

最值定理; 有界定理; 介值定理.

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续.

(3) 计算二元函数极限的方法

1) 利用函数的连续性

2) 利用极限的四则运算法则

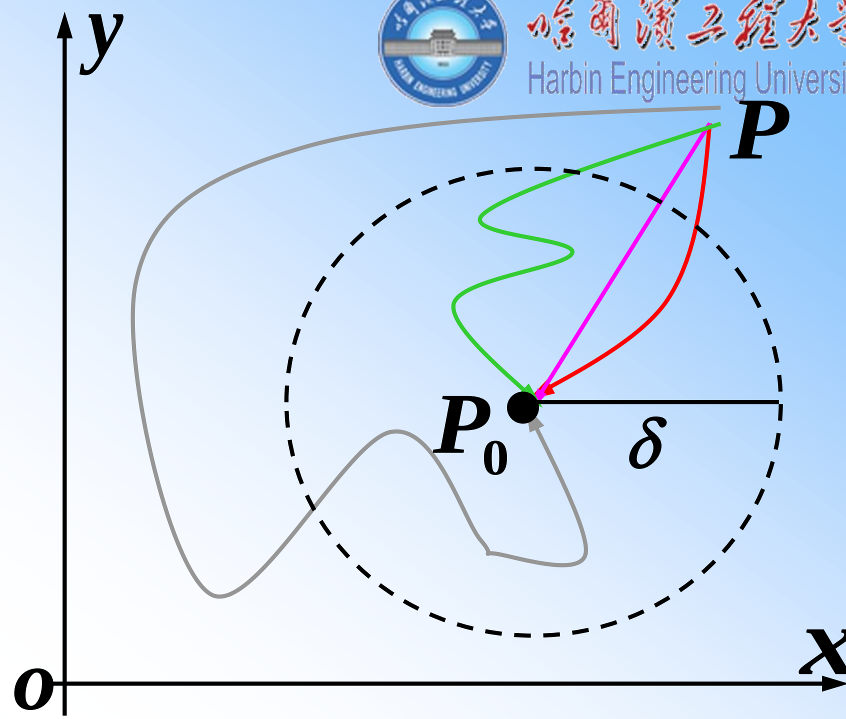
3) 利用两边夹法则

4) 利用无穷小量乘以有界量仍为无穷小量

5) 转化为一元函数极限

[注意]:

所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以**任何方式**趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于 A.



换言之，若点 $P(x,y)$ 按照两种不同的方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的数值，或按某种方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 不存在极限，则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{不存在}.$$

（4）说明点(0,0)处极限不存在的方法:

（1）令$P(x,y)$沿$y=kx$趋向于(0,0)，若极限值与k有关，则可断言极限不存在;

（2）找两种不同趋近方式，使$f(x,y)$在点(0,0)处的极限存在，但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点处极限不存在;

（3）按某种方式，使$f(x,y)$在点(0,0)处的极限不存在，此时也可断言$f(x,y)$在点(0,0)处极限不存在.

2. 偏导数

(1) 偏导数的定义

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$z_x\Big|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$z_y\Big|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

(2) 有关结论

- 函数在一点偏导数存在 $\nRightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\longrightarrow$ 与求导顺序无关

(3) 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases} \text{先代后求} \\ \text{先求后代} \\ \text{利用定义} \quad \textbf{(0,0)} \end{cases}$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

3. 微分

（1）结合二元函数在某点可微的必要条件，可得利用可微的定义验证$z = f(x, y)$在$(0,0)$是否可微即等同于验证

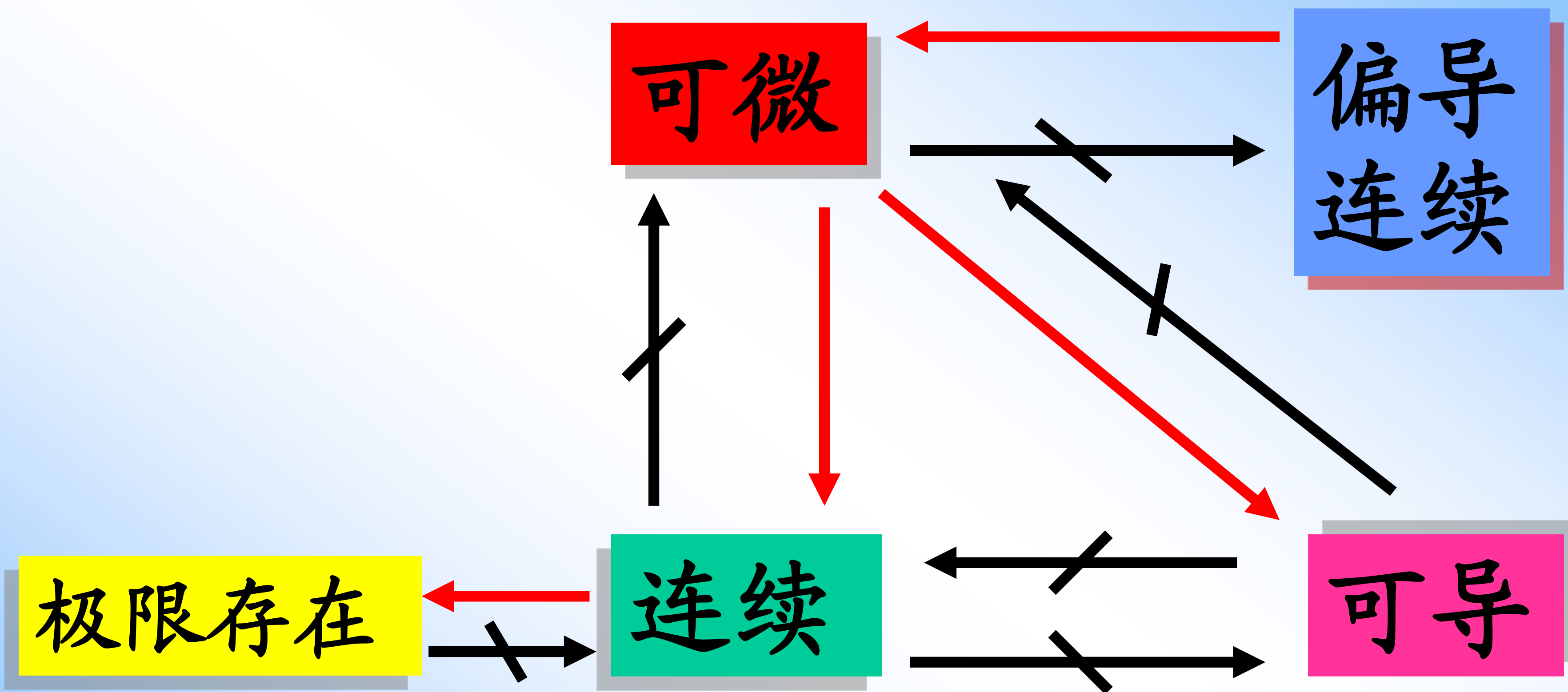
$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta z = [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] + o(\rho)$$

即 $\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y] = o(\rho)$

亦即 $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = 0.$

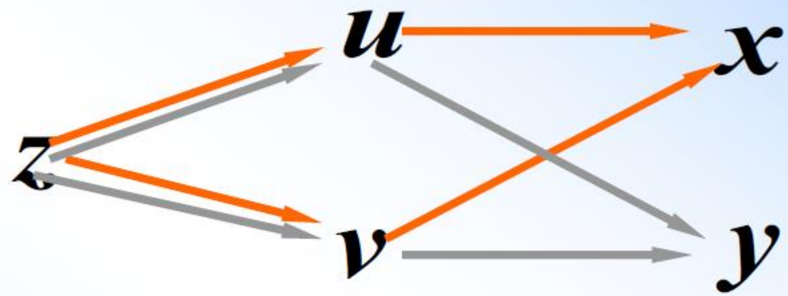
（2）重要关系



记法：　记住四个红色箭头，其它说法不正确！

4. 复合函数的微分法

(1) 复合函数求导的链式法则



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

“分段用乘, 分叉用加, 单路全导, 叉路偏导”

(2) 全微分形式不变性

对 $z=f(u,v)$, 不论 u , v 是自变量还是中间变量,

$$\mathrm{d}z=f_u(u,v)\,\mathrm{d}u+f_v(u,v)\,\mathrm{d}v$$

5. 隐函数存在定理及偏导的计算

（1）隐函数存在定理

设函数$F(x,y,z)$满足条件:

1. $F_x(x,y,z)$，$F_y(x,y,z)$，$F_z(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内$U(P)$内连续;

2. $F(x_0,y_0,z_0)=0, F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$

则在$U(P)$内，方程$F(x,y,z)=0$必能唯一确定一个定义在点$Q(x_0,y_0)$的某邻域$U(Q)$内的二元单值函数$z=f(x,y)$, 使得

1. $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ ， $(x,y,f(x,y))\in U(P)$, $(x,y)\in U(Q)$, 且$f(x_0,y_0)=z_0$;

2. $f(x,y)$在$U(Q)$内有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

（2）由方程确定的隐函数求偏导

方程$F(x,y,z)=0$确定了函数$z=z(x,y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

1) 公式法：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$；

2) 两边求偏导法：$F_x'+F_z'\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$；$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$

3) 全微分：$F_x'\mathrm{d}x+F_y'\mathrm{d}y+F_z'\mathrm{d}z=0$；$\mathrm{d}z=-\dfrac{F_x'}{F_z'}\mathrm{d}x-\dfrac{F_y'}{F_z'}\mathrm{d}y$

(3) 方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$确定了函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

方法：方程组两端同时对$x(y)$求偏导或微分.

6. 微元法在几何上的应用

(1) 曲线的切线和法平面

情况 1 曲线由参数方程给出

曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的切向量

$$\vec{T} = \{\, x'(t_0)\,,\, y'(t_0)\,,\, z'(t_0)\,\};$$

切线方程: $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程: $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$

情况 2 曲线由一般方程给出

设空间曲线方程为 $L:\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$，$M(x_0, y_0, z_0)$为曲线上的一点，此函数方程组可确定 y,z 是关于 x 的隐函数，即曲线可用(隐式)方程：

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$ 来表示.

此时只需求出 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$，则切向量即为

$$\vec{T} = \{1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\}\Big|_{M_0}$$

（2）曲面的切平面和法线

情况 1 隐式的情况

曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\};$$

切平面方程:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程: $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

情况 2 显式的情况

空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

向上的法向量 $\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

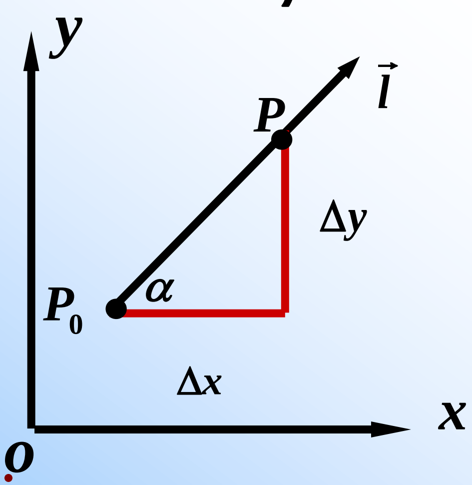
法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

7. 方向导数与梯度

（1）方向导数的定义

定义1 函数的增量 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$ 与 P_0, P两点间距离 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 之比值，当 P 沿着 $\vec{l}$ 趋于 P_0 时，极限存在，则称这个极限为函数在点 P 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数．记为：

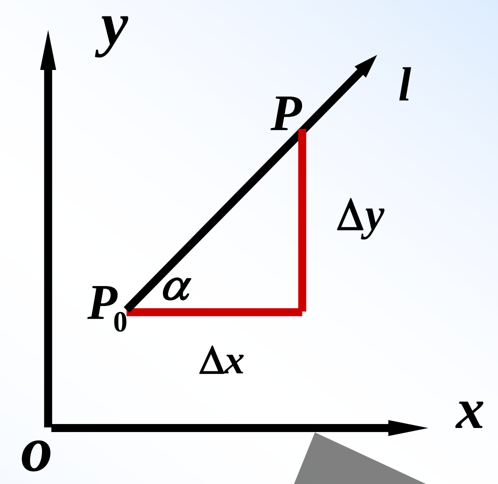
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\rho}.$$



定义2. 设函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的某一邻域$U(P_0)$内有定义，l是xOy平面上以$P_0(x_0, y_0)$为始点的一条射线，与l同方向的单位向量为$\vec{e_l}=(\cos\alpha, \cos\beta)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\bigg|_{P_0}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

为函数$f(x,y)$在P_0处沿$\vec{l}$方向的**方向导数.**



Why?

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\quad \Delta y=\rho\cos\beta,$$

（2）方向导数的计算

1）二元函数$z=f(x,y)$沿平面上向量$\vec{l}$的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$向量$\vec{l}$的方向余弦，可通过将$\vec{l}$单位化得到.

2）三元函数$u=f(x,y,z)$沿空间向量$\vec{l}$的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$向量$\vec{l}$的方向余弦，可通过将$\vec{l}$单位化得到.

（3）梯度

二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

说明：沿梯度方向的方向导数最大，最大值为梯度的模；沿梯度的反方向方向导数最小.

8. 多元函数的极值 $z = f(x,y)$

(1) 求二元函数的极值(有判别法)

设 $f(x,y)$ 在 (x,y) 有二阶连续的偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$. 记 $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$, 则

(I) $AC - B^2 > 0$时具有极值，且当$A < 0$时，$f(x,y)$在点P_0取极大值，当$A > 0$时，$f(x,y)$在点P_0取极小值;

(II) $AC - B^2 < 0$时，点P_0不是$f(x,y)$的极值;

(III) $AC - B^2 = 0$时$f(x,y)$在点P_0可能有极值，也可能没有极值，需另作判定.

(2) 函数的最值问题

第一步 找目标函数，确定定义域(及约束条件)

第二步 判别

闭区域上的最值：比较驻点及边界点上函数值的大小

条件极值：根据问题的实际意义确定最值

(3) 条件极值$\begin{cases} u = f(x,y,z)\text{最大, 最小} \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

方法 1: 拉格朗日乘数法: $L = u + \lambda\varphi$, 求$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow F$ 的驻点，则 L 的驻点包含 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z) = 0$下的驻点.

方法2：解除约束（墙裂不建议使用）.

第二部分

去年部分期中考试题解析

制作人：柴艳有

一、选择题

1. 下列命题正确的是______.

(A) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处一阶偏导存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处二重极限存在

(B) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处一阶偏导连续

(C) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处一阶偏导存在

(D) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处一阶偏导连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则______.

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续

(B) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微

(C) $f(x,y)$ 的一阶偏导函数在点 $(0,0)$ 处的二重极限存在

(D) $f(x,y)$ 的一阶偏导函数在点 $(0,0)$ 处连续

3. 设有隐函数方程 $xy + z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程______.

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x, y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$ 和 $x = x(y,z)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$

4. 设$z=z(x,y)$是由方程$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$所确定的函数，其中

$F(u,v)$是变量 u, v 的任意可微函数，且$xF_u+yF_v\neq 0$，则

必有______.

(A) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$　　(B) $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=z$

(C) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$　　(D) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=z$

5. 函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ ______.

(A) 无极值　　(B) 有两个极大值

(C) 有两个极小值　　(D) 有一个极大值和一个极小值

二、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{xy+1}-1}$ 的值为________.

2. 设函数 $f(x,y)=\ln(x^2-3x^3y^2)$，则偏导数 $f_x(1,0)=$____________.

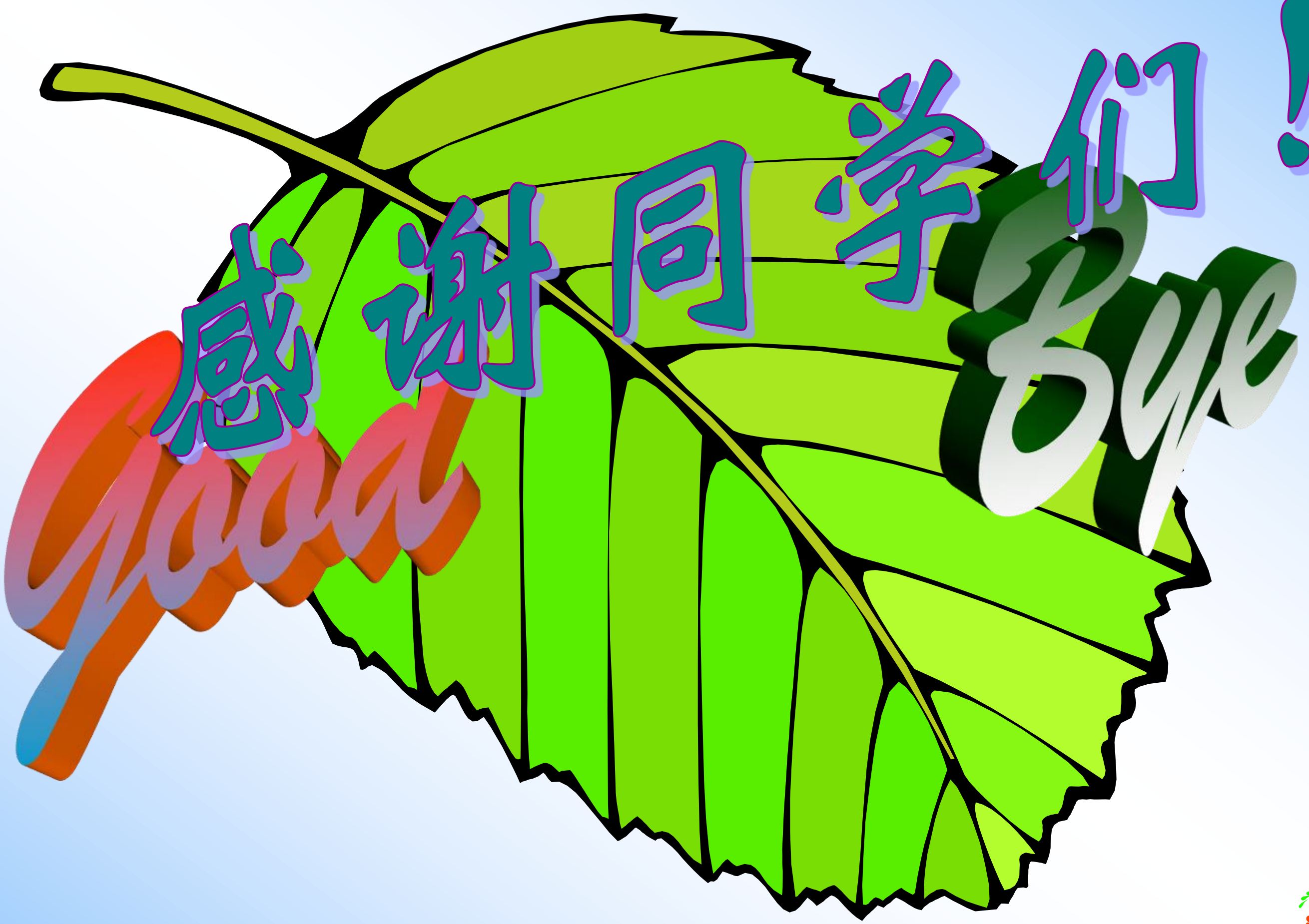
4. 设函数 $z=f(x,\dfrac{x}{y})$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

5. 曲面 $z=y+\ln\dfrac{x}{z}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法线方程是__________.

6. 函数 $u=x^2\cos(y+3z)$ 在点 $(1,0,0)$ 处方向导数的最小值为________.

7. 原点 $(0,0)$ 到椭圆 $x^2+y^2+xy=2$ 上点的最小距离为________.

感谢同学们！



制作人：柴艳有