例4 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}$

练习1：判定 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{6}$ 的敛散性.

例5. 设 $a_1=1$，$a_{n+1}=\cos a_n$，讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

例6. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

例7. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$（注：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 称为调和级数）的敛散性.

§10.2.

例1. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

注 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

例12：讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的敛散性.

练习1：1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^n}$ 的敛散性，其中 $k>0$.

2. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+1}}$ 的敛散性.

例3 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$的敛散性.

例4: 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$的敛散性.

例5 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$的敛散性.（$a>0$）

练习2：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$（$a>0$，$a\neq e$），当$a\in$ ________ 时，级数收敛.

例6 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$的敛散性.

例17. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^n}$的敛散性.

例18 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 的敛散性.

练习3: 1. 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $(u_n\neq 0)$, 则下列级数必收敛的为 (　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$

例19 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2$ 的敛散性.

练习4：讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\alpha}{n}$ 的敛散性 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

练习5：1. 设常数 $k>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ (　　)

A. 绝对收敛，　B. 条件收敛，　C. 发散，　D. 敛散性无法确定，

2、设常数 $\lambda>0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

______

A、绝对收敛，B、条件收敛，C、发散，D、敛散性

与 λ 有关.

上次课总结：1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性 $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}$ 的敛散性.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$f(x)\begin{cases} \text{连续} \\ \text{正} \\ \downarrow \end{cases}$ 且 $f(n)=a_n$.

3. 积分审敛法 $\begin{cases} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.} \\ \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散.} \end{cases}$

4. P级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p\le 1 & \text{发散} \\ p>1 & \text{收敛.} \end{cases}$

5、比较审敛法：大收小收，小发大发.

6. 几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} |q|<1 & 收敛于 \dfrac{1}{1-q}. \\ |q|\geq 1 & 发散. \end{cases}$

上次课总结

1. 正项级数：

比值（根值）判别法 $\Rightarrow$ 比较法极限形式 $\Rightarrow$ 比较法

积分审敛法

2. 交错级数：Leibniz判别法：$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

注 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 收敛.

上次课总结：1、任意项级数：绝对收敛 ⇒ 收敛。

注 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} 0<p\le 1: & \text{条件收敛} \\ p>1: & \text{绝对收敛} \end{cases}$