§11.1 微分方程的基本概念

1. 定义：包含自变量，未知函数及未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

注 ① 未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程 (ordinary differential equation — ODE)

② 未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程. (partial differential equation — PDE)

2. 定义：未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶（order）

3. 定义：未知函数及其各阶导数都是一次式的微分方程称为线性微分方程（linear differential equation）

注 ① n阶线性微分方程的一般形式：均为一次式

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

② 不是线性方程的称为非线性微分方程.

例 $y' = 2\sqrt{y}$ —— 一阶非线性微分方程.

考虑 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ （1）

4. 定义：若将 $y=y(x)$ 代入方程(1)使得(1)成为恒等式，则称 $y=y(x)$ 为方程(1)的一个解.

5. 定义：n阶常微分方程的包含n个任意常数的解 $y=f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为(1)的

通解 (general solution)

6. 定义：决定特解的条件(不唯一)称为微分方程的初始条件 (initial condition)

7. 定义：一个常微分方程满足初始条件的解称为微分方程的特解.

例

① $y=x^2+1$ 为 $y'=2x$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

② $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$ 的初值问题：

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

8. 定义：常微分方程的每个解都是一元函数，它的图形称为该常微分方程的一条积分曲线.

11.2：

例1：解 $\frac{dy}{dx}=xy$

例2：求解初值问题 $\begin{cases} 2x\sin y\,dx+(x^2+3)\cos y\,dy=0 \\ y(1)=\frac{\pi}{6} \end{cases}$

练习1：$y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解为 $y=$ ______

例2：解 $\sqrt{1-y^2}=3x^2y\dfrac{dy}{dx}$

例3 解 $(y^2-3x^2)dx+2xy\,dy=0$

例3：$x\dfrac{dy}{dx}=x-y$ 满足初始条件 $y(\sqrt{2})=0$ 的特解

为 ______

例题4：解

(1) $y' = \cos(x-y)$

(2) $y' = \dfrac{1}{x^2+y^2+2xy}$

(3) $y' = \dfrac{1}{x\sin^2(xy)} - \dfrac{y}{x}$

例14：求 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解

练习5：$y'+y=e^{x}$ 满足 $y(0)=0$ 的特解为______

练习6：求 $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x}$ 的通解

例15 解 $xdy-ydx=y^2e^{y}dy$

例16：解 $(y^3x^2+xy)y'=1$.

练习：解 $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2-1}\sqrt{y}=x$.

例17：解 $(x^2-y)dx-(x-y)dy=0$

例18：解 $y^2dx+(xy+\ln y)dy=0$

上次课总结：1、可分离变量的微分方程：

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \text{通解：} F(y) = G(x) + C$$

2. 齐次方程：$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow$ 令 $u = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow y = ux \Rightarrow f(u) = \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \Rightarrow$ 通解

3、① 一阶线性齐次微分方程：$y'+P(x)y=0$

通解：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

② 一阶线性非齐次微分方程：$y'+P(x)y=Q(x)$

注 积分因子 $I(x)=e^{\int P(x)dx}$

$\Rightarrow I(x)(y'+P(x)y)=Q(x)I(x) \Rightarrow \int (I(x)y)'dx$

$=\int Q(x)I(x)dx \Rightarrow I(x)y=\int Q(x)I(x)dx+C$

$\Rightarrow$ 通解：$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

4. Bernouli 微分方程：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0, 1)$

$$\Rightarrow y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$$

换为 z

令 $z = y^{1-\alpha}$ $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = (1-\alpha)\big(Q(x) - P(x)z\big)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$ $\Rightarrow$ 求其通解

5. 全微分方程：$Pdx + Qdy = 0$

$\begin{cases} \text{为全微分方程} \Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \text{通解：} u(x, y) = C \end{cases}$