11、3：

例1 求 $y''' = x$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$，

$y''(0) = -2$ 的解

例2： 求 $xy'' = y'\ln y'$ 的通解

练习1： 解 $x^2y'' + xy' = 1$

练习2：已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，$f(x)$ 满足等式 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,dt=0$，

求 $f'(x)$，并证明：$e^{-x}\le f(x)\le 1 \quad (x\ge 0)$.

例3 解 $y''=\frac{1+y'^2}{2y}$.

练习3：$yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.

§11.4 线性微分方程解的结构

n阶线性微分方程的标准形式：

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

当 $f(x) = 0$ 时，称为线性齐次微分方程.

当 $f(x) \neq 0$ 时，称为线性非齐次微分方程.

注 二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

一、线性齐次微分方程解的结构：

1、定理1（叠加原理）若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是 $y''(x)+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ $(\forall C_1, C_2\in R)$ 也是该方程的解.

2、**定义**：设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数，若 $\exists$ n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，$\ni \forall x \in I$，有恒等式 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$

则称这 n 个函数在区间 I 上线性相关，否则，称线性无关。

例 e^x, e^{-x}, e^{2x} 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关；

$\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关.

注 若 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$，$\forall x \in I$，则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 I 上

线性无关.

3. 定理2：若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个

线性无关的解，则 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ $(\forall C_1, C_2 \in R)$

为该方程的通解

推论：若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的 n 个线性无关的解

则 $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ $(\forall c_i\in R, i=1,2,\cdots,n)$

为该方程的通解

二、二阶线性非齐次微分方程解的结构：

1. 定理3：若 y^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的一个特解，而 Y 是对应的齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解，则 $y=y^*+Y$ 为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解

注 若 y_1^* 与 y_2^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的两个解，则 $y_1^*-y_2^*$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解

2. 定理4：若 y_1^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ 的一个解，y_2^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ 的一个解，则 $y_1^*+y_2^*$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个解.

练习：设 y_1,y_2,y_3 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，则此方程的通解为 ______

A. $c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$

B. $c_1y_1 + c_2y_2 - (c_2 + c_3)y_3$

C. $c_1y_1 + c_2y_2 - (1 - c_1 - c_2)y_3$

D. $c_1y_1 + c_2y_2 + (1 - c_1 - c_2)y_3$

上次课总结：1. $y''=f(x,y')$：注 不显含 y

令 $y'=p(x) \Rightarrow y''=p'(x) \Rightarrow p'(x)=f(x,p(x))$

2. $y''=f(y,y')$：注 不显含 x.

令 $y'=p(y) \Rightarrow y''=p(y)\dfrac{dp}{dy} \Rightarrow p(y)\dfrac{dp}{dy}=f(y,p(y))$