11.5：

例11：解 $y''+4y'+4y=0$

例12：解 $y''-4y'+3y=0$

例13：解 $y''+2y'+5y=0$

练习：设 $y_1=e^{2x}$，$y_2=xe^{2x}$，则它们满足的二阶常系数线性齐次微分方程是 ________

例14：求$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0$的通解.

例15：求$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$的通解.

11.6

例11：求$y''-5y'+6y=e^{4x}(x+1)$的通解.

例12：求$y''+y'=x-2$的一个特解y^*.

练习1：解 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$

练习2：解 $y''+y'+y=e^{x}$

练习3：求 $y''-y=4xe^{x}$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解

练习4：$y''-2y'-3y=x+e^{-x}$ 的特解形式应设为 ________

练习5：设 $y_1 = xe^{x} + e^{2x}$，$y_2 = xe^{x} + e^{-x}$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程的解，则此方程为 ______

练习6：设 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x) = e^{x} + \int_0^x t\varphi(t)\,dt - x\int_0^x \varphi(t)\,dt$ 求 $\varphi(x)$

例13：解 $y'' - 3y' = \sin 2x$

11.7

例：解 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$

练习：解 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$

上次课总结：1. $y''+py'+qy=0 \Rightarrow$ 特征方程：$r^2+pr+q=0$

① 两个不等的实根 $r_1 \neq r_2$：通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

② 两个相等的实根 $r_1=r_2=r$：通解 $y=e^{rx}(C_1+C_2x)$

③ 一对共轭复根：$r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$ 通解 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2. $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$

$$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x) \qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\text{是特征单根}\\ 2 & \lambda\text{是特征重根}\end{cases}$$

(1) $r^2+pr+q=0 \Rightarrow$ 特征根 r_1, r_2

$\Rightarrow y''+py'+qy=0$ 的通解 Y

(2) ① 由 λ 不是特征根 $(\lambda\neq r_1, r_2) \Rightarrow y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$

② 由 λ 是特征单根 ($\lambda=r_1$ 或 $\lambda=r_2$ 但是 $r_1\neq r_2$)

$\Rightarrow y^*=xe^{\lambda x}Q_m(x)$

③ λ是特征重根. $(\lambda = r_1 = r_2 = r)$ $\Rightarrow$ $y^* = x^2 e^{\lambda x} Q_m(x)$

令 $Q_n(x) = x^k Q_m(x)$ 求 $Q_n'(x)$、$Q_n''(x)$，再代入

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p) Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q) Q_n(x) = P_m(x)$$

求出 $Q_m(x)$ 中的系数，从而求出 y^*

(3) 通解：$y = Y + y^*$