# 概率论与数理统计

**概率论与数理统计教研团队**[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

**2024 年　春**

大工至善
大学至真

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

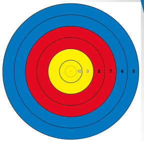
# 目　录

# 数学期望

## 数学期望的引入

**例 1**

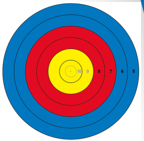
**一人进行飞镖练习，规定射入黄色区域得 2 分，射入红色区域得 1 分，其它情况得 0 分. 现在此人射击了 $N$ 次，其中得 $k(k=0,1,2)$ 分有 $a_k$ 次，问此人射击一次平均得分是多少?**



## 数学期望的引入

**例 1**

**一人进行飞镖练习，规定射入黄色区域得 2 分，射入红色区域得 1 分，其它情况得 0 分. 现在此人射击了 $N$ 次，其中得 $k(k=0,1,2)$ 分有 $a_k$ 次，问此人射击一次平均得分是多少?**

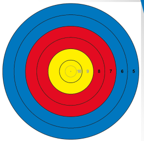


**解：设 $X$ 表示此人射击一次的得分数，所有可能取值为 $0,1,2$. 此人射击了 $N$ 次，其中得 $k(k=0,1,2)$ 分有 $a_k$ 次，所以此人射击一次平均得分为**

## 数学期望的引入

**例 1**

**一人进行飞镖练习，规定射入黄色区域得 2 分，射入红色区域得 1 分，其它情况得 0 分. 现在此人射击了 $N$ 次，其中得 $k(k=0,1,2)$ 分有 $a_k$ 次，问此人射击一次平均得分是多少?**



**解：设 $X$ 表示此人射击一次的得分数，所有可能取值为 $0,1,2$. 此人射击了 $N$ 次，其中得 $k(k=0,1,2)$ 分有 $a_k$ 次，所以此人射击一次平均得分为**

$$\frac{0\times a_0+1\times a_1+2\times a_2}{N}=\sum_{k=0}^{2}k\frac{a_k}{N}=\sum_{k=0}^{2}kf_k\xrightarrow{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{2}kp_k$$

**其中 $f_k$ 为事件 $\{X=k\}$ 发生的频率，$p_k$ 为事件 $\{X=k\}$ 发生的概率.**

**定义 1**

(1) 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots,$ 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数的和为随机变量 $X$ 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

# 数学期望的定义

**定义 1**

(1) 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots,$ 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数的和为随机变量 $X$ 的数学期望, 记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

(2) 设连续型随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积分值为随机变量 $X$ 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

**例 2**

设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X)$.

**例 2**

**设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X)$.**

**解：**$X$ 的分布律为 $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，由数学期望定义

## 例 2

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $E(X)$.

**解：** $X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**由数学期望定义**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

**例 2**

**设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X)$.**

**解：** $X$ 的分布律为 $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，由数学期望定义

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

## 例 2

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $E(X)$.

**解：** $X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**由数学期望定义**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

## 例 2

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $E(X)$.

**解：** $X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**由数学期望定义**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

**例 2**

**设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X)$.**

**解：** $X$ 的分布律为 $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，由数学期望定义

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

**例 2**

**设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X)$.**

**解：** $X$ 的分布律为 $P\{X=k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，由数学期望定义

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

**注：若 $X \sim P(\lambda)$，则 $E(X) = \lambda$.**

**例 3**

设随机变量 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$.

**例 3**

**设随机变量 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$.**

**解：** $X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，由数学期望定义

## 例 3

**设随机变量 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$.**

**解：** $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，由数学期望定义

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

**例 3**

**设随机变量 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$.**

**解：**$X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，由数学期望定义

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$$

**例 3**

**设随机变量 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$.**

**解：** $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，由数学期望定义

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$$

**注：若 $X \sim U(a,b)$，则 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.**

**例 4**

设随机变量 $X$ 取整数 $n(n \geq 0)$ 的概率为

$$P\{X=n\}=\frac{AB^n}{n!}, n=0,1,2,\cdots$$

已知 $E(X)=a$($a$ 为常数)，求 $A$ 和 $B$.

**例 4**

**设随机变量 $X$ 取整数 $n(n \geq 0)$ 的概率为**

$$P\{X=n\}=\frac{AB^n}{n!}, n=0,1,2,\cdots$$

**已知 $E(X)=a$($a$ 为常数)，求 $A$ 和 $B$.**

**解：由分布律性质 $\sum_{n=0}^{+\infty} P\{X=n\}=1$ 有**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{AB^n}{n!}=A\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B^n}{n!}=Ae^B=1$$

**例 4**

**设随机变量 $X$ 取整数 $n(n \geq 0)$ 的概率为**

$$P\{X=n\}=\frac{AB^n}{n!}, n=0,1,2,\cdots$$

**已知 $E(X)=a$($a$ 为常数)，求 $A$ 和 $B$.**

**解：由分布律性质 $\sum_{n=0}^{+\infty} P\{X=n\}=1$ 有**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{AB^n}{n!}=A\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B^n}{n!}=Ae^B=1$$

**可得到 $A=e^{-B}$**

**又因为**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X = n\}$$

**又因为**

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X=n\}=\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{AB^n}{n!}$$

又因为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X=n\}=\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{AB^n}{n!}$$

$$=AB\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!}$$

**又因为**

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X=n\}=\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{AB^n}{n!}$$

$$=AB\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!}=ABe^B$$

又因为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X=n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{AB^n}{n!} \\ &= AB\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = ABe^B \\ &= a \end{aligned}$$

又因为

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X = n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{AB^n}{n!} \\
&= AB\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = ABe^B \\
&= a
\end{aligned}
$$

可得到 $B = a$.

又因为

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} nP\{X = n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{AB^n}{n!} \\
&= AB\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = ABe^B \\
&= a
\end{aligned}
$$

可得到 $B = a.$

故 $A = e^{-a}, B = a.$

## 例 5

有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 $X_k(k=1,2)$ 服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}, \ \lambda>0.$$

(1) 若将两个电子装置串联组成整机，求整机工作寿命 $N$ 的数学期望;
(2) 若将两个电子装置并联组成整机，求整机工作寿命 $M$ 的数学期望.

**例 5**

有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 $X_k(k=1,2)$ 服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ \lambda>0.$$

(1) 若将两个电子装置串联组成整机，求整机工作寿命 $N$ 的数学期望;

(2) 若将两个电子装置并联组成整机，求整机工作寿命 $M$ 的数学期望.

解：$X_k(k=1,2)$的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

**（1）由题意可知，$N=\min(X_1,X_2)$，于是 $N$ 的分布函数为**

(1) 由题意可知，$N=\min(X_1,X_2)$，于是 $N$ 的分布函数为

$$F_N(x)=1-(1-F(x))^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）由题意可知，$N = \min(X_1, X_2)$，于是 $N$ 的分布函数为

$$F_N(x) = 1 - (1 - F(x))^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 $N$ 的概率密度为

$$f_N(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 由题意可知，$N = \min(X_1, X_2)$，于是 $N$ 的分布函数为

$$F_N(x) = 1 - (1 - F(x))^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 $N$ 的概率密度为

$$f_N(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$N$ 的数学期望为

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-2\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda}$$

（2）由题意可知，$M=\max(X_1,X_2)$，于是 $M$ 的分布函数为

(2）由题意可知，$M = \max(X_1, X_2)$，于是 $M$ 的分布函数为

$$F_M(x) = (F(x))^2 = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^2, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

**（2）由题意可知，$M = \max(X_1, X_2)$，于是 $M$ 的分布函数为**

$$F_M(x) = (F(x))^2 = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^2, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

**则 $M$ 的概率密度为**

$$f_M(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right), & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 由题意可知，$M=\max(X_1,X_2)$，于是 $M$ 的分布函数为

$$F_M(x)=(F(x))^2=\begin{cases}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^2, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $M$ 的概率密度为

$$f_M(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right), & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$M$ 的数学期望为

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_M(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2\lambda x\left(e^{-\lambda x}-e^{-2\lambda x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2\lambda}$$

(2）由题意可知，$M=\max(X_1,X_2)$，于是 $M$ 的分布函数为

$$F_M(x)=(F(x))^2=\begin{cases}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^2, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $M$ 的概率密度为

$$f_M(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right), & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$M$ 的数学期望为

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_M(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2\lambda x\left(e^{-\lambda x}-e^{-2\lambda x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2\lambda}$$

注意到 $E(M)=3E(N)$，即从平均取值意义上讲，并联组成整机的工作寿命是串联组成整机的工作寿命的 3 倍.

**例 6**

**设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ -\infty<x<+\infty$$

**问 $E(X)$ 是否存在?**

**例 6**

设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ -\infty<x<+\infty$$

问 $E(X)$ 是否存在?

解：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x$

**例 6**

**设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^{2}\right)},\ -\infty<x<+\infty$$

**问 $E(X)$ 是否存在?**

**解：由于** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi\left(1+x^{2}\right)}\mathrm{d}x$

**例 6**

**设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, \quad -\infty<x<+\infty$$

**问 $E(X)$ 是否存在?**

**解：由于** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$

**例 6**

**设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^{2}\right)},\ -\infty<x<+\infty$$

**问 $E(X)$ 是否存在?**

**解：由于** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi\left(1+x^{2}\right)}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\pi\left(1+x^{2}\right)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^{2}\right)\Big|_{0}^{+\infty}$$

**例 6**

**设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, \; -\infty<x<+\infty$$

**问 $E(X)$ 是否存在?**

**解：由于** $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x| \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi} \ln \left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x \rightarrow+\infty} \frac{1}{\pi} \ln \left(1+x^2\right)=+\infty$$

**例 6**

**设随机变量 $X$ 服从柯西分布，其概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ -\infty<x<+\infty$$

**问 $E(X)$ 是否存在?**

**解：由于** $$\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)=+\infty$$

**故 $\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的，因此柯西分布的期望 $E(X)$ 不存在.**

**例 7**

设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

随机变量 $Y = X^2$，求 $E(Y)$.

**例 7**

设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

随机变量 $Y=X^2$，求 $E(Y)$.

解：随机变量 $Y$ 的分布律为

| $X^2$ | $(-1)^2$ | $0^2$ | $1^2$ | $2^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

**例 7**

设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

随机变量 $Y=X^2$，求 $E(Y)$.

解：随机变量 $Y$ 的分布律为

| $X^2$ | $(-1)^2$ | $0^2$ | $1^2$ | $2^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

即，

| $Y$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

# 随机变量函数的数学期望引入

**例 7**

设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

随机变量 $Y = X^2$，求 $E(Y)$.

解：随机变量 $Y$ 的分布律为

| $X^2$ | $(-1)^2$ | $0^2$ | $1^2$ | $2^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

即，

| $Y$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

故 $$E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$$

## 随机变量函数的数学期望引入

**例 7**

设随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

随机变量 $Y = X^2$，求 $E(Y)$.

解：随机变量 $Y$ 的分布律为

| $X^2$ | $(-1)^2$ | $0^2$ | $1^2$ | $2^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

即，

| $Y$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

故 $E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 0^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \frac{1}{4}$

# 一维随机变量函数的数学期望

**定理 2**

**设随机变量 $Y$ 是随机变量 $X$ 的函数，记为 $Y = g(X)$.**

# 一维随机变量函数的数学期望

**定理 2**

**设随机变量 $Y$ 是随机变量 $X$ 的函数，记为 $Y = g(X)$.**

**(1) $X$ 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$,**
**若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有，**

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$$

**定理 2**

**设随机变量 $Y$ 是随机变量 $X$ 的函数，记为 $Y = g(X)$.**

**(1) $X$ 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$，若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有，**

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$$

**(2) $X$ 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则有**

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

**注意**

**定理的重要性在于，当求 $E[g(X)]$ 时，不必计算 $g(X)$ 的分布律或概率密度，只需要利用 $X$ 的分布律或概率密度以及函数 $g(x)$ 即可.**

**例 8**

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 $X$（单位：分钟）服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 某顾客在窗口等待服务，若超过 15 分钟他还没有等到服务就离开, 设他实际等待的时间为 $Y$ , 求此人实际等待的平均时间 $E(Y)$.

解：由题意可知，随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ ;

## 例 8

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 $X$（单位：分钟）服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 某顾客在窗口等待服务，若超过 15 分钟他还没有等到服务就离开, 设他实际等待的时间为 $Y$，求此人实际等待的平均时间 $E(Y)$.

解：由题意可知，随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$；

因为实际等待的时间 $Y = g(X) = \min(X, 15)$，所以有

**例 8**

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 $X$（单位：分钟）服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 某顾客在窗口等待服务，若超过 15 分钟他还没有等到服务就离开，设他实际等待的时间为 $Y$，求此人实际等待的平均时间 $E(Y)$.

解：由题意可知，随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$；

因为实际等待的时间 $Y=g(X)=\min(X,15)$，所以有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\min(x,15)\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x$$

## 例 8

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 $X$（单位：分钟）服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 某顾客在窗口等待服务，若超过 15 分钟他还没有等到服务就离开, 设他实际等待的时间为 $Y$ , 求此人实际等待的平均时间 $E(Y)$.

解：由题意可知，随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$；

因为实际等待的时间 $Y=g(X)=\min(X,15)$，所以有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\min(x,15)\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{15}\frac{x}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x+\int_{15}^{+\infty}\frac{15}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x\approx 7.7687(\text{分钟})$$

# 二维随机变量函数的数学期望

**定理 3**

**设随机变量 $Z$ 是随机变量 $X$ 与 $Y$ 的函数，记为 $Z = g(X, Y)$.**

# 二维随机变量函数的数学期望

**定理 3**

**设随机变量 $Z$ 是随机变量 $X$ 与 $Y$ 的函数，记为 $Z = g(X, Y)$.**

**(1) $(X, Y)$ 为二维离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$，若二重级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则有，**

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$$

# 二维随机变量函数的数学期望

**定理 3**

设随机变量 $Z$ 是随机变量 $X$ 与 $Y$ 的函数，记为 $Z=g(X,Y)$.

(1) $(X,Y)$ 为二维离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，若二重级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则有,

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) $(X,Y)$ 为二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$，若广义二重积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

特别地，取 $Z_1 = g(X, Y) = X$ 和 $Z_2 = g(X, Y) = Y$.

$(X, Y)$ 为二维离散型随机变量，其分布律为 $p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$，则有，

$$E(Z_1) = E[g(X, Y)] = E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} x_i p_{ij}$$

$$E(Z_2) = E[g(X, Y)] = E(Y) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} y_j p_{ij}$$

特别地，取 $Z_1 = g(X,Y) = X$ 和 $Z_2 = g(X,Y) = Y$.

$(X,Y)$ 为二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$，则有

$$E(Z_1) = E[g(X,Y)] = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E(Z_2) = E[g(X,Y)] = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**例 9**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.25 | 0.15 |
| 1 | 0.15 | 0.2 | 0.15 |

求随机变量 $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

**例 9**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.25 | 0.15 |
| 1 | 0.15 | 0.2 | 0.15 |

求随机变量 $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

解：$E(Z)=E\left(\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}\right)$

**例 9**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.25 | 0.15 |
| 1 | 0.15 | 0.2 | 0.15 |

求随机变量 $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

解：$E(Z)=E\left(\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}\right)$

$$=0.1\sin\frac{\pi(0+0)}{2}+0.15\sin\frac{\pi(0+1)}{2}+0.25\sin\frac{\pi(1+0)}{2}$$

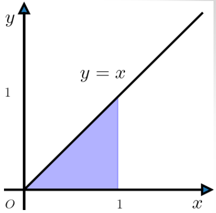
$$+0.2\sin\frac{\pi(1+1)}{2}+0.15\sin\frac{\pi(2+0)}{2}+0.15\sin\frac{\pi(2+1)}{2}=0.25$$

### 例 10

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$.

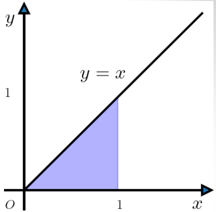


**例 10**

**设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求 $E(X)$.**




**解：（方法一）由二维随机变量函数的数学期望，可得**

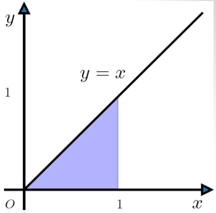
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 24x(1-x)y\mathrm{d}y$$

**例 10**

**设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求 $E(X)$.**




**解：（方法一）由二维随机变量函数的数学期望，可得**

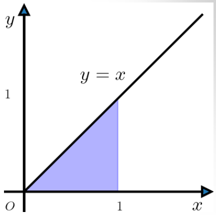
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 24x(1-x)y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 12x^3(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$$

**（方法二）先求随机变量 $X$ 边缘的概率密度，**

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

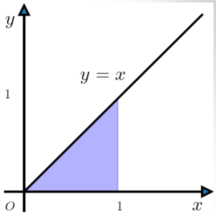
**由** $f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ **可知，**



(方法二）先求随机变量 $X$ 边缘的概率密度，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

由 $f(x,y) = \begin{cases} 24(1-x)y, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 可知，

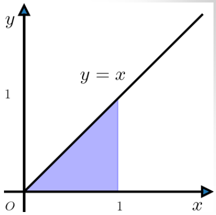



当 $x \le 0$ 或 $x \ge 1$ 时，$f_X(x) = 0$;

（方法二）先求随机变量 $X$ 边缘的概率密度，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

由 $f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 可知，



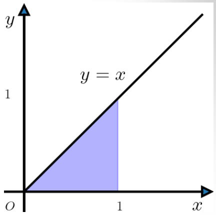

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=0$；
当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_0^x 24(1-x)y\mathrm{d}y=12x^2(1-x).$$

(方法二）先求随机变量 $X$ 边缘的概率密度，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

由 $f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 可知，




当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=0$;
当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_0^x 24(1-x)y\mathrm{d}y=12x^2(1-x).$$

故 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 12x^3(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$

**例 11**

**某公司经销某种原料，根据历史资料表明，这种原料的市场需求量 $X$ (单位: 吨) 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，每销售出一吨该原料，公司可获利 3 万元；若销售不出，则每吨原料需储存费 1 万元，问公司应组织多少这种原料，可使平均收益最大?**

**例 11**

**某公司经销某种原料, 根据历史资料表明, 这种原料的市场需求量 $X$ (单位: 吨) 服从区间 (2000, 4000) 上的均匀分布, 每销售出一吨该原料, 公司可获利 3 万元; 若销售不出, 则每吨原料需储存费 1 万元, 问公司应组织多少这种原料, 可使平均收益最大?**

**解: 设公司组织该种原料 $t$ 吨, 收益为 $Y$ (单位: 万元), 显然应满足 $2000 \le t \le 4000$, 对于给定的 $t$, 收益 $Y$ 是市场需求量 $X$ 的函数.**

**例 11**

**某公司经销某种原料，根据历史资料表明，这种原料的市场需求量 $X$ (单位: 吨) 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，每销售出一吨该原料，公司可获利 3 万元；若销售不出，则每吨原料需储存费 1 万元，问公司应组织多少这种原料，可使平均收益最大?**

**解：设公司组织该种原料 $t$ 吨，收益为 $Y$（单位：万元），显然应满足 $2000 \le t \le 4000$，对于给定的 $t$，收益 $Y$ 是市场需求量 $X$ 的函数.**

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3t, & X \ge t, \\ 3X - (t - X), & X < t. \end{cases} = \begin{cases} 3t, & X \ge t, \\ 4X - t, & X < t. \end{cases}$$

由 $X$ 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，可知其概率密度为

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 $X$ 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，可知其概率密度为

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是收益 $Y=g(X)=\begin{cases}3t, & X\geq t,\\ 4X-t, & X<t.\end{cases}$ 的数学期望为

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

由 $X$ 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，可知其概率密度为

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2000}, & 2000 < x < 4000, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是收益 $Y = g(X) = \begin{cases} 3t, & X \geq t, \\ 4X - t, & X < t. \end{cases}$ 的数学期望为

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2000} \left( \int_{2000}^{t} (4x - t) \mathrm{d}x + \int_{t}^{4000} 3t \mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

由 $X$ 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，可知其概率密度为

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是收益 $Y=g(X)=\begin{cases}3t, & X\geq t,\\ 4X-t, & X<t.\end{cases}$ 的数学期望为

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2000}\left(\int_{2000}^{t}(4x-t)\mathrm{d}x+\int_{t}^{4000}3t\mathrm{d}x\right)\\ &=\frac{1}{2000}(-2t^2+14000t-8\times10^6)\end{aligned}$$

由 $X$ 服从区间 (2000，4000) 上的均匀分布，可知其概率密度为

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是收益 $Y=g(X)=\begin{cases}3t, & X\geq t,\\ 4X-t, & X<t.\end{cases}$ 的数学期望为

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2000}\left(\int_{2000}^{t}(4x-t)\mathrm{d}x+\int_{t}^{4000}3t\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2000}(-2t^2+14000t-8\times10^6)\end{aligned}$$

显然 $t=3500$ 时取最大值，因此公司应组织 3500 吨原料.

# 数学期望的性质

## 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$;

## 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$;

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$;

# 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$;

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

# 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$;

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$，其中 $a, b, c$ 为常数;

# 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$;

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$，其中 $a, b, c$ 为常数;
- $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + c\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + c$

## 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C)=C$;

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX)=CE(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

- $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$，其中 $a,b,c$ 为常数;
- $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + c\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + c$

(4) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

## 数学期望的性质

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$;

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;

- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$，其中 $a, b, c$ 为常数;
- $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i + c\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + c$

(4) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

- 当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立时，有 $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$;

## 数学期望性质证明

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$.

## 数学期望性质证明

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C.$

证明：设随机变量 $X$ 只有一个可能去的取值为 $C$，其分布律为 $P\{X = C\} = 1$，由数学期望的定义有

$$E(X) = E(C) = 1 \times C = C.$$

## 数学期望性质证明

(1）设 $C$ 是常数，则有 $E(C) = C$.

证明：设随机变量 $X$ 只有一个可能去的取值为 $C$，其分布律为 $P\{X = C\} = 1$，由数学期望的定义有

$$E(X) = E(C) = 1 \times C = C.$$

(2）设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$.

## 数学期望性质证明

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C)=C$.

证明：设随机变量 $X$ 只有一个可能去的取值为 $C$，其分布律为 $P\{X=C\}=1$，由数学期望的定义有

$$E(X)=E(C)=1\times C=C.$$

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX)=CE(X)$.

证明：以连续型随机变量为例设 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，

## 数学期望性质证明

(1) 设 $C$ 是常数，则有 $E(C)=C$.

证明：设随机变量 $X$ 只有一个可能去的取值为 $C$，其分布律为 $P\{X=C\}=1$，由数学期望的定义有

$$E(X)=E(C)=1\times C=C.$$

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $E(CX)=CE(X)$.

证明：以连续型随机变量为例设 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，

$$E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)\mathrm{d}x=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=CE(X)$$

## 数学期望性质证明

**以下连续型随机变量为例，设 $(X, Y)$ 的概率密度为 $f(x, y)$.**

## 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.
（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

## 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.

（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明：$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

## 数学期望性质证明

**以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.**

**（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.**

**证明：** 
$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

## 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.

（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明：$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

## 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.

（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明：
$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

（4）设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

# 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.

（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明：
$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

（4）设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

证明：
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

## 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.

（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明：
$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

（4）设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

证明：
$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

## 数学期望性质证明

以下连续型随机变量为例，设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$.

（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

证明：
$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

（4）设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

证明：
$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

**例 12**

设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $E(X)$.

**例 12**

**设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $E(X)$.**

**解：（方法一）** $X$ **服从参数为** $n,p$ **的二项分布，其分布律为**
$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n, 0<p<1$，**由数学期望定义**

**例 12**

**设随机变量** $X \sim b(n,p)$**，求** $E(X)$.

**解：（方法一）** $X$ **服从参数为** $n,p$ **的二项分布，其分布律为** $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n, 0<p<1$**，由数学期望定义**

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

**例 12**

设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $E(X)$.

解：（方法一）$X$ 服从参数为 $n,p$ 的二项分布，其分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n, 0<p<1$，由数学期望定义

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

**例 12**

**设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $E(X)$.**

**解：（方法一）$X$ 服从参数为 $n,p$ 的二项分布，其分布律为**

$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n, 0<p<1$，**由数学期望定义**

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

**例 12**

**设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $E(X)$.**

**解：（方法一）** $X$ **服从参数为** $n,p$ **的二项分布，其分布律为** $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n, 0<p<1$，**由数学期望定义**

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$=np\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^m p^m(1-p)^{n-1-m}=np(p+(1-p))^{n-1}=np$$

解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.

**解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.**

**设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量**

**解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.**

**设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量**

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.

设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.

设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

因为 $X_i \sim b(0,1)$，并且易得 $E(X_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$，所以有

解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.
设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功,} \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败.} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
因为 $X_i \sim b(0,1)$，并且易得 $E(X_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$，所以有

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.

设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

因为 $X_i \sim b(0,1)$，并且易得 $E(X_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$，所以有

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

注:

(1) 若 $X \sim b(1,p)$，则 $E(X) = p$.

解：（方法二）利用数学期望的性质进行求解.

设随机变量 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中成功的次数，且每次试验成功的概率为 $p$，则 $X \sim b(n,p)$，针对每一次试验，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

因为 $X_i \sim b(0,1)$，并且易得 $E(X_i) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$，所以有

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

注:

(1) 若 $X \sim b(1,p)$，则 $E(X) = p$.

(2) 若 $X \sim b(n,p)$，则 $E(X) = np$.

**例 13**

**一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 $X$ 表示停车次数，求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并且设各个旅客在各个车站是否下车相互独立）.**

**例 13**

**一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 $X$ 表示停车次数，求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并且设各个旅客在各个车站是否下车相互独立）.**

**解：引入随机变量**

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{站有人下车,} \\ 0, & \text{第}i\text{站无人下车.} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, 10.$$

**其分布律为**

| $X_i$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ | $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ |

由此可知, 对于 $i = 1, 2, \cdots, 10$，有

$$E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

**由此可知, 对于 $i = 1, 2, \cdots, 10$，有**

$$E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

**而总停车次数 $X$ 可表示为**

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

由此可知, 对于 $i=1,2,\cdots,10$，有

$$E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

而总停车次数 $X$ 可表示为

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$$

所以

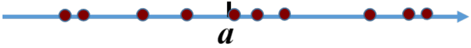
$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right)\approx 8.784$$

# 方差的定义

# 方差的引入

**例 1**

**某零件的真实长度为 $a$，现用甲乙两台仪器各测量 10 次，将测量结果 $X$ 标示在坐标轴上，如图所示**



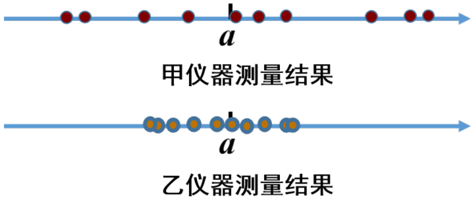

甲仪器测量结果


乙仪器测量结果

# 方差的引入

**例 1**

**某零件的真实长度为 $a$，现用甲乙两台仪器各测量 10 次，将测量结果 $X$ 标示在坐标轴上，如图所示**

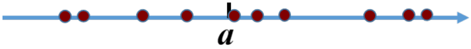



**乙的测量结果好! 除了考虑测量结果的均值外, 还需考虑测量值与均值之间的平均偏离程度——方差.**

## 方差的引入

**例 1**

**某零件的真实长度为 $a$，现用甲乙两台仪器各测量 10 次，将测量结果 $X$ 标示在坐标轴上，如图所示**




甲仪器测量结果

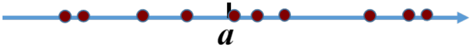

乙仪器测量结果

**怎样度量测量值与均值之间的平均偏离程度?**

## 方差的引入

**例 1**

**某零件的真实长度为 $a$，现用甲乙两台仪器各测量 10 次，将测量结果 $X$ 标示在坐标轴上，如图所示**




甲仪器测量结果


乙仪器测量结果

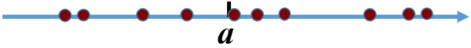
**怎样度量测量值与均值之间的平均偏离程度?**

$$E[X-E(X)]?$$

# 方差的引入

**例 1**

**某零件的真实长度为 $a$，现用甲乙两台仪器各测量 10 次，将测量结果 $X$ 标示在坐标轴上，如图所示**




甲仪器测量结果


乙仪器测量结果

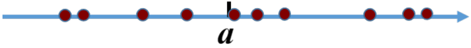
**怎样度量测量值与均值之间的平均偏离程度?**

$$E[X - E(X)]? \qquad E\left[|X - E(X)|\right]?$$

# 方差的引入

**例 1**

**某零件的真实长度为 $a$，现用甲乙两台仪器各测量 10 次，将测量结果 $X$ 标示在坐标轴上，如图所示**




甲仪器测量结果


乙仪器测量结果

**怎样度量测量值与均值之间的平均偏离程度?**

$$E[X-E(X)]? \quad E\left[|X-E(X)|\right]? \quad E\left\{[X-E(X)]^2\right\}?$$

# 方差的定义

**定义 4**

设 $X$ 是随机变量，若 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 存在，则称 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 为随机变量 $X$ 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

$\sqrt{D(X)}$ 记为 $\sigma(X)$，称为 $X$ 的标准差或均方差.

**定义 4**

设 $X$ 是随机变量, 若 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 存在, 则称 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 为随机变量 $X$ 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

$\sqrt{D(X)}$ 记为 $\sigma(X)$，称为 $X$ 的标准差或均方差.

**注:**

(1) $D(X)$ 和 $\sigma(X)$ 刻画了 $X$ 取值与其均值的偏离程度;

# 方差的定义

**定义 4**
设 $X$ 是随机变量,若 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 存在,则称 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$ 为随机变量 $X$ 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

$\sqrt{D(X)}$ 记为 $\sigma(X)$，称为 $X$ 的标准差或均方差.

注:
(1) $D(X)$ 和 $\sigma(X)$ 刻画了 $X$ 取值与其均值的偏离程度;
(2) $D(X)$ 越小——$X$ 取值越集中；$D(X)$ 越大——$X$ 取值越分散.

## 方差的计算

(1) $X$ 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$，则

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x_k - E(X)\right]^2 p_k$$

# 方差的计算

**(1)** $X$ **为离散型随机变量，其分布律为** $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$**，则**

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x_k - E(X)\right]^2 p_k$$

**(2)** $X$ **为连续型随机变量，其概率密度为** $f(x)$**，则**

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f(x) \mathrm{d}x$$

## 方差的计算

(1) $X$ 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$，则

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x_k - E(X)\right]^2 p_k$$

(2) $X$ 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f(x) \mathrm{d}x$$

(3) 方差的计算公式：

$$D(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

**例 2**

设随机变量 $X_1, X_2, X_3$，它们的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_3(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求这三个随机变量的方差.

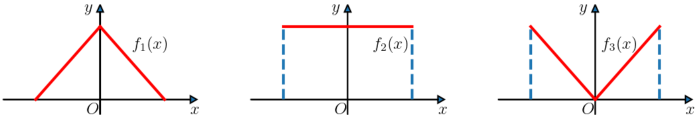
**例 2**

**设随机变量 $X_1, X_2, X_3$，它们的概率密度分别为**

$$f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_3(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求这三个随机变量的方差.**

**解：密度图像如图所示，由图像可以看出，三个随机变量的数学期望都是 0.**




**从图像看出，以均值为中心，第一个比较集中，第二个次之，第三个比较分散.**

**例 2**

**设随机变量 $X_1, X_2, X_3$，它们的概率密度分别为**

$$f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_3(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求这三个随机变量的方差.**

$$D(X_1)=E(X_1^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

## 例 2

**设随机变量 $X_1, X_2, X_3$，它们的概率密度分别为**

$$f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_3(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求这三个随机变量的方差.**

$$D(X_1)=E(X_1^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_2(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

**例 2**

**设随机变量 $X_1, X_2, X_3$，它们的概率密度分别为**

$$f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_3(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求这三个随机变量的方差.**

$$D(X_1)=E(X_1^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_2(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

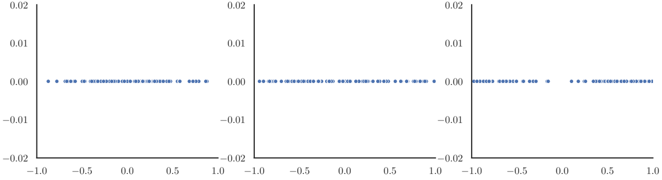
$$D(X_3)=E(X_3^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_3(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

## 例 2

**设随机变量 $X_1, X_2, X_3$，它们的概率密度分别为**

$$f_1(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_3(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求这三个随机变量的方差.**



**例 3**

设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $D(X)$.

**例 3**

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $D(X)$.

**解：**$X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**且** $E(X) = \lambda$，**而**

**例 3**

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $D(X)$.

**解：** $X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**且** $E(X) = \lambda$，**而**

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

**例 3**

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $D(X)$.

**解：**$X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**且** $E(X) = \lambda$，**而**

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

**例 3**

**设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $D(X)$.**

**解：** $X$ 的分布律为 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，且 $E(X) = \lambda$，而

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

## 例 3

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $D(X)$.

**解：** $X$ **的分布律为** $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**且** $E(X) = \lambda$，**而**

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

**例 3**

**设随机变量** $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，**求** $D(X)$.

**解：** $X$ **的分布律为** $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，**且** $E(X) = \lambda$，**而**

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

**例 3**

**设随机变量 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$，求 $D(X)$.**

**解：** $X$ 的分布律为 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \cdots$，且 $E(X) = \lambda$，而

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

**故** $X$ **的方差：** $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda.$

**例 4**

**设随机变量** $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，**求** $E(X), D(X)$.

**例 4**

**设随机变量** $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，**求** $E(X), D(X)$.

**解：** $X$ **的概率密度为** $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，**则**

## 例 4

**设随机变量** $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，**求** $E(X), D(X)$.

**解：** $X$ **的概率密度为** $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，**则**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

**例 4**

**设随机变量 $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X), D(X)$.**

**解：** $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{\lambda}$$

## 例 4

**设随机变量 $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X), D(X)$.**

**解：** $X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x$$

## 例 4

**设随机变量 $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X), D(X)$.**

**解**：$X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{2}{\lambda^2}$$

**例 4**

**设随机变量 $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X), D(X)$.**

**解**：$X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## 例 4

设随机变量 $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$，求 $E(X), D(X)$.

解：$X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

注：若 $X \sim E(\lambda)$，则 $E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

# 方差的性质

# 方差的性质

(1) $D(X) \geq 0$，当且仅当 $P\{X = C\} = 1$ 时取等号，其中 $C$ 是常数.

## 方差的性质

(1) $D(X) \geq 0$，当且仅当 $P\{X = C\} = 1$ 时取等号，其中 $C$ 是常数.

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2 D(X)$;

## 方差的性质

(1) $D(X) \geq 0$，当且仅当 $P\{X = C\} = 1$ 时取等号，其中 $C$ 是常数.

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2 D(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

# 方差的性质

(1) $D(X) \geq 0$，当且仅当 $P\{X = C\} = 1$ 时取等号，其中 $C$ 是常数.

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2 D(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

(4) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

# 方差的性质

(1) $D(X) \geq 0$，当且仅当 $P\{X = C\} = 1$ 时取等号，其中 $C$ 是常数.

(2) 设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2 D(X)$;

(3) 设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

(4) 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

(5) $D(X) = 0$ 的充要条件是 $P\{X = E(X)\} = 1$.

综合性质（1）（2）（4），设 $X, Y$ 相互独立，$a, b, c$ 是常数，则

$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$$

特例

$$D(X + c) = D(X)$$

推广　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$D(c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i)$$

其中 $c_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 为常数.

# 方差性质证明

仅证明性质（2）（3）（4）

# 方差性质证明

## 仅证明性质（2）（3）（4）

（2）设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2D(X)$.

# 方差性质证明

**仅证明性质（2）（3）（4）**

**（2）设** $X$ **是随机变量，** $C$ **是常数，则有** $D(CX) = C^2D(X)$.

**证明：利用方差的计算公式及期望的性质，有**

# 方差性质证明

**仅证明性质（2）（3）（4）**

**（2）设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2 D(X)$.**

**证明：利用方差的计算公式及期望的性质，有**

$$D(CX) = E[(CX)^2] - [E(X)]^2 = C^2 E(X^2) - C^2 [E(X)]^2 = C^2 D(X)$$

# 方差性质证明

**仅证明性质（2）（3）（4）**

**(2）设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX) = C^2D(X)$.**

**证明：利用方差的计算公式及期望的性质，有**

$$D(CX) = E[(CX)^2] - [E(X)]^2 = C^2E(X^2) - C^2[E(X)]^2 = C^2D(X)$$

**（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有**

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

## 方差性质证明

**仅证明性质（2）（3）（4）**

**（2）设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数，则有 $D(CX)=C^2D(X)$.**

**证明：利用方差的计算公式及期望的性质，有**

$$D(CX)=E[(CX)^2]-[E(X)]^2=C^2E(X^2)-C^2[E(X)]^2=C^2D(X)$$

**（3）设 $X$ 和 $Y$ 是两个随机变量，则有**
$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

**证明：利用方差的定义及期望的性质，有**

$$D(X\pm Y)=E\left\{\left[(X\pm Y)-E(X\pm Y)\right]^2\right\}$$

$$D(X \pm Y) = E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\}$$

$$\begin{aligned} D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

**(4) 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

**（4）若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

**证明：利用期望的性质**

$$
E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

**(4) 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

**证明：利用期望的性质**

$$
E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = E\left[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

**(4) 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

**证明：利用期望的性质**

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] &= E\left[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right] \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

**(4) 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

**证明：利用期望的性质**

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] &= E\left[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right] \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 \pm 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]
\end{aligned}
$$

**(4) 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

**证明：利用期望的性质**

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] &= E\left[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right] \\
&= E\left\{\left[\left(X - E(X)\right) \pm \left(Y - E(Y)\right)\right]^2\right\} \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X \pm Y) &= E\left\{\left[(X \pm Y) - E(X \pm Y)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\left[\big(X - E(X)\big) \pm \big(Y - E(Y)\big)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\big(X - E(X)\big)^2 + \big(Y - E(Y)\big)^2 \pm 2\,\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\right\} \\
&= D(X) + D(Y) \pm 2E\left[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\right]
\end{aligned}
$$

**(4）若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，则有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.**

**证明：利用期望的性质**

$$
\begin{aligned}
E\left[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\right] &= E\left[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\right] \\
&= E\left\{\left[\big(X - E(X)\big) \pm \big(Y - E(Y)\big)\right]^2\right\} \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) = 0
\end{aligned}
$$

**所以当 $X, Y$ 相互独立时，$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$** □

**例 5**

(1) 设随机变量 $X \sim b(1,p)$，求 $D(X)$；

(2) 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $D(X)$.

**例 5**

(1) 设随机变量 $X \sim b(1,p)$，求 $D(X)$；

(2) 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $D(X)$.

解：(1) $X$ 的分布律为

| $X$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-p$ | $p$ |

**例 5**

(1) 设随机变量 $X \sim b(1,p)$，求 $D(X)$；
(2) 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $D(X)$.

解：(1) $X$ 的分布律为

| $X$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-p$ | $p$ |

显然 $E(X)=p$，而

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

**例 5**

(1) 设随机变量 $X \sim b(1,p)$，求 $D(X)$；

(2) 设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 $D(X)$.

解：(1) $X$ 的分布律为

| $X$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-p$ | $p$ |

显然 $E(X)=p$，而

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

则

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=p-p^2=p(1-p)$$

(2) 设 $n$ 重伯努利试验中，随机变量 $X$ 表示试验成功的次数，$p$ 表示试验成功的概率，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

表示第 $i$ 次试验，$X_i \sim b(0,1)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

**(2) 设 $n$ 重伯努利试验中，随机变量 $X$ 表示试验成功的次数，$p$ 表示试验成功的概率，引入随机变量**

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功,} \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败.} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

**表示第 $i$ 次试验，$X_i \sim b(0,1)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.**

**因为 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，所以**

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$$

(2) 设 $n$ 重伯努利试验中，随机变量 $X$ 表示试验成功的次数，$p$ 表示试验成功的概率，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

表示第 $i$ 次试验，$X_i \sim b(0, 1)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

因为 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，所以

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$$

**注:**

(1) 若 $X \sim b(1, p)$，则 $E(X) = p, D(X) = p(1-p)$.

(2) 设 $n$ 重伯努利试验中，随机变量 $X$ 表示试验成功的次数，$p$ 表示试验成功的概率，引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

表示第 $i$ 次试验，$X_i \sim b(0, 1)$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

因为 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，所以

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$$

注:

(1) 若 $X \sim b(1, p)$，则 $E(X) = p, D(X) = p(1-p)$.

(2) 若 $X \sim b(n, p)$，则 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$

**例 6**

(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $E(X), D(X)$；

(2) 设随机变量 $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(Y), D(Y)$.

**例 6**

(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $E(X), D(X)$；
(2) 设随机变量 $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(Y), D(Y)$.

**解**：(1) $X$ 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$, 则

**例 6**

(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $E(X), D(X)$；
(2) 设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(Y), D(Y)$.

解：(1) $X$ 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$, 则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 0$$

**例 6**

(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $E(X), D(X)$；

(2) 设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(Y), D(Y)$.

解：（1） $X$ 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$, 则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

**例 6**

(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $E(X), D(X)$；
(2) 设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(Y), D(Y)$.

解：（1） $X$ 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$, 则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1$$

**例 6**

(1) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $E(X), D(X)$;

(2) 设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(Y), D(Y)$.

解：(1) $X$ 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$, 则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1$$

故 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$

(2) 由于 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，利用数学期望和方差的性质有

(2) 由于 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，利用数学期望和方差的性质有

$$0 = E(X) = E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(Y) - \mu)$$

(2) 由于 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，利用数学期望和方差的性质有

$$0 = E(X) = E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(Y) - \mu)$$

$$1 = D(X) = D\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D(Y)$$

(2) 由于 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，利用数学期望和方差的性质有

$$0 = E(X) = E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(Y) - \mu)$$

$$1 = D(X) = D\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}D(Y)$$

可知 $E(Y) = \mu, D(Y) = \sigma^2$

(2) 由于 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，利用数学期望和方差的性质有

$$0 = E(X) = E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(Y) - \mu)$$

$$1 = D(X) = D\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D(Y)$$

可知 $E(Y) = \mu, D(Y) = \sigma^2$

**注:**

(1) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$.

(2) 由于 $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $X=\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，利用数学期望和方差的性质有

$$0=E(X)=E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}(E(Y)-\mu)$$

$$1=D(X)=D\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}D(Y)$$

可知 $E(Y)=\mu, D(Y)=\sigma^2$

注:

(1) 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$.

(2) 若 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,\cdots,n$，且相互独立，令 $X=c_0+\sum_{i=1}^n c_iX_i$，则 $E(X)=c_0+\sum_{i=1}^n c_i\mu_i$，$D(X)=\sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2$，即

$$X \sim N\left(c_0+\sum_{i=1}^n c_i\mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2\right)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是不全为 0 的常数.

**例 7**

设气缸的直径 $X \sim N(22.5, 0.04^2)$（单位：厘米），活塞的直径 $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$（单位：厘米），且 $X, Y$ 相互独立，现任取一个气缸和活塞，求活塞能够装入气缸的概率.

**例 7**

**设气缸的直径 $X \sim N(22.5, 0.04^2)$（单位：厘米），活塞的直径 $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$（单位：厘米），且 $X, Y$ 相互独立，现任取一个气缸和活塞，求活塞能够装入气缸的概率.**

**解：事件 $\{X > Y\}$ 表示活塞能够装入气缸. 由 $X \sim N(22.5, 0.04^2)$，$Y \sim N(22.4, 0.03^2)$，且 $X, Y$ 相互独立，令 $Z = X - Y$，则 $Z \sim N(0.1, 0.05^2)$，所以有**

**例 7**

设气缸的直径 $X \sim N(22.5, 0.04^2)$（单位：厘米），活塞的直径 $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$（单位：厘米），且 $X, Y$ 相互独立，现任取一个气缸和活塞，求活塞能够装入气缸的概率.

解：事件 $\{X > Y\}$ 表示活塞能够装入气缸. 由 $X \sim N(22.5, 0.04^2)$，$Y \sim N(22.4, 0.03^2)$，且 $X, Y$ 相互独立，令 $Z = X - Y$，则 $Z \sim N(0.1, 0.05^2)$，所以有

$$P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = P\{Z > 0\}$$

**例 7**

**设气缸的直径** $X \sim N(22.5, 0.04^2)$ **(单位：厘米)，活塞的直径** $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$ **(单位：厘米)，且** $X, Y$ **相互独立，现任取一个气缸和活塞，求活塞能够装入气缸的概率.**

**解：事件** $\{X > Y\}$ **表示活塞能够装入气缸. 由** $X \sim N(22.5, 0.04^2)$**，** $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$**，且** $X, Y$ **相互独立，令** $Z = X - Y$**，则** $Z \sim N(0.1, 0.05^2)$**，所以有**

$$P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = P\{Z > 0\}$$
$$= P\left\{\frac{Z - 0.1}{0.05} > \frac{0 - 0.1}{0.05}\right\}$$

**例 7**

**设气缸的直径** $X \sim N(22.5, 0.04^2)$ **(单位：厘米)，活塞的直径** $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$ **(单位：厘米)，且** $X, Y$ **相互独立，现任取一个气缸和活塞，求活塞能够装入气缸的概率.**

**解：事件** $\{X > Y\}$ **表示活塞能够装入气缸. 由** $X \sim N(22.5, 0.04^2)$**，** $Y \sim N(22.4, 0.03^2)$**，且** $X, Y$ **相互独立，令** $Z = X - Y$**，则** $Z \sim N(0.1, 0.05^2)$**，所以有**

$$
\begin{aligned}
P\{X > Y\} &= P\{X - Y > 0\} = P\{Z > 0\} \\
&= P\left\{\frac{Z - 0.1}{0.05} > \frac{0 - 0.1}{0.05}\right\} \\
&= 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.9772
\end{aligned}
$$

**例 8**

设随机变量 $X$ 的数学期望为 $E(X)$，方差 $D(X) \neq 0$，令

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

称 $X^*$ 为随机变量 $X$ 的标准化随机变量.

**例 8**

**设随机变量 $X$ 的数学期望为 $E(X)$，方差 $D(X) \neq 0$，令**

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

**称 $X^*$ 为随机变量 $X$ 的标准化随机变量.**

**证明：**

$$E(X^*) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right] = \frac{E(X) - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = 0$$

**例 8**

设随机变量 $X$ 的数学期望为 $E(X)$，方差 $D(X) \neq 0$，令

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

称 $X^*$ 为随机变量 $X$ 的标准化随机变量.

**证明：**

$$E(X^*) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right] = \frac{E(X) - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = 0$$

$$D(X^*) = D\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right] = \frac{D(X - E(X))}{D(X)} = 1$$

# 常见分布的期望和方差

| 分布 | 参数 | 分布律 | 期望 | 方差 |
|---|---|---|---|---|
| $X \sim b(1,p)$ **0-1 分布** | $0<p<1$ | $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$, $k=0,1$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| $X \sim b(n,p)$ **二项分布** | $0<p<1$ $n \geq 1$ | $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| $X \sim P(\lambda)$ **泊松分布** | $\lambda>0$ | $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,\cdots$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| $X \sim U(a,b)$ **均匀分布** | $a<b$ | $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| $X \sim E(\lambda)$ **指数分布** | $\lambda>0$ | $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ **正态分布** | $\mu;\sigma>0$ | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<+\infty$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |

**例 9**

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，对 $X$ 独立地重复观察 4 次，用 $Y$ 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 $Y^2$ 的期望.

**例 9**

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，对 $X$ 独立地重复观察 4 次，用 $Y$ 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 $Y^2$ 的期望.

**解：因为**

$$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

**例 9**

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，对 $X$ 独立地重复观察 4 次，用 $Y$ 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 $Y^2$ 的期望.

解：因为

$$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

所以 $Y\sim b(4,\frac{1}{2})$，故 $E(Y)=2, D(Y)=1$.

**例 9**

设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，对 $X$ 独立地重复观察 4 次，用 $Y$ 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 $Y^2$ 的期望.

**解：因为**

$$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

**所以** $Y\sim b(4,\frac{1}{2})$，**故** $E(Y)=2, D(Y)=1.$

**因此**

$$E(Y^2)=D(Y)+\left[E(Y)\right]^2=1+4=5$$

# 协方差及相关系数

# 协方差的引入

设 $X, Y$ 是两个随机变量，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}$$

特别地，若 $X, Y$ 相互独立，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$. 即，若 $X, Y$ 相互独立，有

$$E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}=0$$

如果 $E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}\neq 0$，则 $X, Y$ 不独立，它们之间存在着一定的关系.

## 协方差的定义

**定义 5**

**设** $(X, Y)$ **为二维随机变量，称** $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ **为随机变量** $X$ **与** $Y$ **的协方差，记为** $\operatorname{Cov}(X, Y)$

$$\operatorname{Cov}(X, Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

## 协方差的计算

**(1)** $(X,Y)$ **为二维离散型随机变量，其分布律为** $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$, **则**

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]p_{ij}$$

# 协方差的计算

**(1)** $(X, Y)$ **为二维离散型随机变量，其分布律为** $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots$，**则**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}[x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p_{ij}$$

**(2)** $(X, Y)$ **为二维连续型随机变量，其概率密度为** $f(x, y)$，**则**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)][y - E(Y)]f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

# 协方差的计算

**(1)** $(X,Y)$ **为二维离散型随机变量，其分布律为** $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots$**，则**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\left[x_i-E(X)\right]\left[y_j-E(Y)\right]p_{ij}$$

**(2)** $(X,Y)$ **为二维连续型随机变量，其概率密度为** $f(x,y)$**，则**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]\left[y-E(Y)\right]f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**(3) 协方差的计算公式：**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

# 协方差的性质

## 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$, $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$;

## 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$，$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$;

(2) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{C}) = 0$，$\boldsymbol{C}$ 是常数;

## 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$，$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X,C)=0$，$C$ 是常数;

(3) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$，$a,b$ 为任意常数.

# 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$，$\mathrm{Cov}(X, X) = D(X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X, C) = 0$，$C$ 是常数;

(3) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$，$a, b$ 为任意常数.

(4) $\mathrm{Cov}(X_1 \pm X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) \pm \mathrm{Cov}(X_2, Y)$;

# 协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$，$\mathrm{Cov}(X, X) = D(X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X, C) = 0$，$C$ 是常数;

(3) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$，$a, b$ 为任意常数.

(4) $\mathrm{Cov}(X_1 \pm X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) \pm \mathrm{Cov}(X_2, Y)$;

(5) 当 $X, Y$ 相互独立时，$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

**例 1**

设随机变量 $X, Y$ 相互独立且同分布，记 $U = X - Y, V = X + Y$，利用协方差的性质，计算 $U$ 与 $V$ 的协方差.

**例 1**

**设随机变量 $X, Y$ 相互独立且同分布，记 $U = X - Y, V = X + Y$，利用协方差的性质，计算 $U$ 与 $V$ 的协方差.**

**解：**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U, V) &= \mathrm{Cov}(X - Y, X + Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) \\
&= D(X) - D(Y)
\end{aligned}
$$

## 相关系数的定义

**定义 6**

设 $(X, Y)$ 为二维随机变量，$D(X) > 0, D(Y) > 0$，称

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量 $X$ 与 $Y$ 的相关系数.

# 相关系数的定义

**定义 6**
设 $(X,Y)$ 为二维随机变量，$D(X)>0, D(Y)>0$，称

$$\rho=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量 $X$ 与 $Y$ 的相关系数.

相关系数的另一种解释是标准化随机变量的协方差，这是因为

$$\rho=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=E\left\{\frac{[X-E(X)]}{\sqrt{D(X)}}\frac{[Y-E(Y)]}{\sqrt{D(Y)}}\right\}=E(X^*Y^*)$$

# 相关系数的定义

**定义 6**
**设 $(X, Y)$ 为二维随机变量，$D(X) > 0, D(Y) > 0$，称**

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

**为随机变量 $X$ 与 $Y$ 的相关系数.**

**相关系数的另一种解释是标准化随机变量的协方差，这是因为**

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = E\left\{\frac{[X - E(X)]}{\sqrt{D(X)}}\frac{[Y - E(Y)]}{\sqrt{D(Y)}}\right\} = E(X^*Y^*)$$

**注：相关系数是一个无量纲的数值.**

# 相关系数的性质

## 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1;$

## 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 若 $D(X) > 0, D(Y) > 0$，则 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为

$$P\{Y = aX + b\} = 1 (a \neq 0).$$

## 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 若 $D(X) > 0, D(Y) > 0$，则 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为

$$P\{Y = aX + b\} = 1(a \neq 0).$$

特别地，

## 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 若 $D(X) > 0, D(Y) > 0$，则 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为

$$P\{Y = aX + b\} = 1 (a \neq 0).$$

特别地，

- $\rho_{XY} = 1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 正相关，此时 $a > 0$;

## 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 若 $D(X) > 0, D(Y) > 0$，则 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为

$$P\{Y = aX + b\} = 1(a \neq 0).$$

特别地，

- $\rho_{XY} = 1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 正相关，此时 $a > 0$;
- $\rho_{XY} = -1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 负相关，此时 $a < 0$.

## 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 若 $D(X) > 0, D(Y) > 0$，则 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为

$$P\{Y = aX + b\} = 1(a \neq 0).$$

特别地，

- $\rho_{XY} = 1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 正相关，此时 $a > 0$;
- $\rho_{XY} = -1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 负相关，此时 $a < 0$.

(3) $\rho_{XY} = 0$ 时，$X$ 与 $Y$ 之间没有线性关系，称 $X$ 与 $Y$ 线性不相关，简称不相关.

# 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) 若 $D(X) > 0, D(Y) > 0$，则 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为

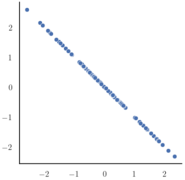
$$P\{Y = aX + b\} = 1(a \neq 0).$$

特别地，

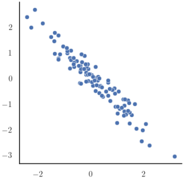
- $\rho_{XY} = 1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 正相关，此时 $a > 0$;
- $\rho_{XY} = -1$ 时，称 $X$ 与 $Y$ 负相关，此时 $a < 0$.

(3) $\rho_{XY} = 0$ 时，$X$ 与 $Y$ 之间没有线性关系，称 $X$ 与 $Y$ 线性不相关，简称不相关.

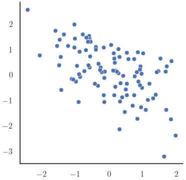
相关系数用来度量两个随机变量之间线性关系的密切程度，$|\rho_{XY}|$ 越接近于 1，$X$ 与 $Y$ 之间的线性关系越显著；$|\rho_{XY}|$ 越接近于 0，$X$ 与 $Y$ 之间的线性关系越微弱.



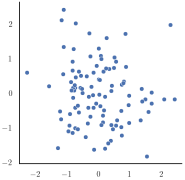

(a) $\rho_{XY} = -1$



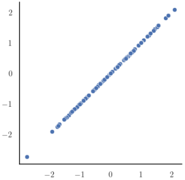

(b) $\rho_{XY} = -0.95$



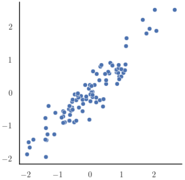

(c) $\rho_{XY} = -0.5$



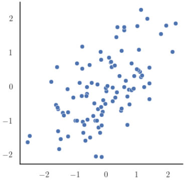

(d) $\rho_{XY} = 0$



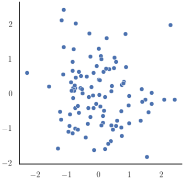

(e) $\rho_{XY} = 1$




(f) $\rho_{XY} = 0.95$




(g) $\rho_{XY} = 0.5$




(h) $\rho_{XY} = 0$

图: **相关系数与线性关系密切程度**

**例 2**

**抛一枚均匀的硬币 10 次，若令 $X, Y$ 分别表示出现正面和反面的次数，求 $X$ 与 $Y$ 的相关系数.**

**例 2**

**抛一枚均匀的硬币 10 次，若令 $X, Y$ 分别表示出现正面和反面的次数，求 $X$ 与 $Y$ 的相关系数.**

**分析**　$X$ 与 $Y$ 均服从二项分布，若利用相关系数的定义

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

需要计算 $E(X), E(Y), D(X), D(Y), E(XY)$，计算量比较大.

**例 2**

**抛一枚均匀的硬币 10 次，若令 $X, Y$ 分别表示出现正面和反面的次数，求 $X$ 与 $Y$ 的相关系数.**

**分析** $X$ 与 $Y$ 均服从二项分布，若利用相关系数的定义

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

需要计算 $E(X), E(Y), D(X), D(Y), E(XY)$，计算量比较大.

解：由题意可知 $X + Y = 10$，所以 $X$ 与 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY} = -1$.

## 例 3

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.8 | 0 |

，

求 $\rho_{XY}$.

## 例 3

设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0.1$ | $0.1$ |
| $1$ | $0.8$ | $0$ |

，

求 $\rho_{XY}$.

**解：** 由题意可知 $X \sim b(1, 0.1)$，$Y \sim b(1, 0.8)$ 则，

## 例 3

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.8 | 0 |

，

求 $\rho_{XY}$.

**解：** 由题意可知 $X \sim b(1,0.1)$，$Y \sim b(1,0.8)$ 则，

$$E(X)=0.1, E(Y)=0.8; D(X)=0.09, D(Y)=0.16.$$

$$E(XY)=0\times 0\times 0.1+1\times 0\times 0.1+0\times 1\times 0.8+1\times 1\times 0=0$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.08$$

## 例 3

设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.8 | 0 |

，求 $\rho_{XY}$.

**解：** 由题意可知 $X \sim b(1, 0.1)$，$Y \sim b(1, 0.8)$ 则，

$$E(X) = 0.1, E(Y) = 0.8; D(X) = 0.09, D(Y) = 0.16.$$

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.8 + 1 \times 1 \times 0 = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.08$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-0.08}{\sqrt{0.09}\sqrt{0.16}} = -0.67$$

## 例 4

**二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2,0<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

**求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.**

**例 4**

二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.

解：（1）直接算相关的数字特征

**例 4**

二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.

**解：（1）直接算相关的数字特征**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**例 4**

**二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

**求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.**

**解：（1）直接算相关的数字特征**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x}{4}(x+1)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$$

**例 4**

二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.

**解：（1）直接算相关的数字特征**

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\int_0^2 \frac{y}{8}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \frac{y}{4}(y+1)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$$

**例 4**

**二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.**

**解：（1）直接算相关的数字特征**

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\int_0^2\frac{xy}{8}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

**例 4**

**二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求（1）$\rho_{XY}$；（2）$D(X+Y)$.**

**解：（1）直接算相关的数字特征**

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{1}{4}(x^3+x^2)\mathrm{d}x=\frac{5}{3}$$

**已经计算得到 $E(X) = E(Y) = \frac{7}{6}, E(X^2) = E(Y^2) = \frac{5}{3}, E(XY) = \frac{4}{3}$，进一步计算得到**

**已经计算得到** $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, E(X^2)=E(Y^2)=\frac{5}{3}, E(XY)=\frac{4}{3}$**，进一步计算得到**

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

已经计算得到 $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, E(X^2)=E(Y^2)=\frac{5}{3}, E(XY)=\frac{4}{3}$，进一步计算得到

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

已经计算得到 $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, E(X^2)=E(Y^2)=\frac{5}{3}, E(XY)=\frac{4}{3}$，进一步计算得到

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

同理可计算 $D(Y)=\frac{11}{36}$，所以有

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}$$

**已经计算得到** $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, E(X^2)=E(Y^2)=\frac{5}{3}, E(XY)=\frac{4}{3}$**，进一步计算得到**

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

**同理可计算** $D(Y)=\frac{11}{36}$**，所以有**

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}$$

**(2)**

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$$

**定义 7**

若 $\rho_{XY}=0$，则称 $X$ 与 $Y$ 不相关.

# 不相关的定义

**定义 7**

若 $\rho_{XY}=0$，则称 $X$ 与 $Y$ 不相关.

**定理 8**

对随机变量 $X$ 与 $Y$，下列命题是等价的.

(1) $X$ 与 $Y$ 不相关（$\rho_{XY}=0$）;

## 不相关的定义

**定义 7**

若 $\rho_{XY}=0$，则称 $X$ 与 $Y$ 不相关.

**定理 8**

对随机变量 $X$ 与 $Y$，下列命题是等价的.

(1) $X$ 与 $Y$ 不相关（$\rho_{XY}=0$）；

(2) $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\mathbf{0}$;

## 不相关的定义

**定义 7**

若 $\rho_{XY} = 0$，则称 $X$ 与 $Y$ 不相关.

**定理 8**

对随机变量 $X$ 与 $Y$，下列命题是等价的.

(1) $X$ 与 $Y$ 不相关（$\rho_{XY} = 0$）；

(2) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$；

(3) $E(XY) = E(X)E(Y)$；

## 不相关的定义

**定义 7**

若 $\rho_{XY}=0$，则称 $X$ 与 $Y$ 不相关.

**定理 8**

对随机变量 $X$ 与 $Y$，下列命题是等价的.

(1) $X$ 与 $Y$ 不相关（$\rho_{XY}=0$）;

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;

(3) $E(XY)=E(X)E(Y)$;

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

# 不相关与独立的关系

**若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X$ 与 $Y$ 不相关；反之不然.**

**若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X$ 与 $Y$ 不相关；反之不然.**

**例 5**

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律如表格所示，求 $\rho_{XY}$，并讨论 $X$ 与 $Y$ 的相关性和独立性.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

**若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X$ 与 $Y$ 不相关；反之不然.**

**例 5**

设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布律如表格所示，求 $\rho_{XY}$，并讨论 $X$ 与 $Y$ 的相关性和独立性.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

解：计算可得 $E(X) = E(Y) = \frac{3}{2}, E(XY) = \frac{9}{4}$，

# 不相关与独立的关系

**若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X$ 与 $Y$ 不相关；反之不然.**

**例 5**

**设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律如表格所示，求 $\rho_{XY}$，并讨论 $X$ 与 $Y$ 的相关性和独立性.**

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

**解：计算可得** $E(X)=E(Y)=\frac{3}{2}, E(XY)=\frac{9}{4}$，**故**

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0, \rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

# 不相关与独立的关系

**若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $X$ 与 $Y$ 不相关；反之不然.**

**例 5**

**设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的联合分布律如表格所示，求 $\rho_{XY}$，并讨论 $X$ 与 $Y$ 的相关性和独立性.**

| $Y$ \ $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

**解：计算可得** $E(X) = E(Y) = \frac{3}{2}, E(XY) = \frac{9}{4}$，**故**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$$

**由此可知，$X$ 与 $Y$ 不相关.**

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

然而，$P\{X=0,Y=1\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{1}{8}\times\frac{6}{8}$，所以 $X$ 与 $Y$ 不独立.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

**然而，$P\{X=0,Y=1\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{1}{8}\times\frac{6}{8}$，所以 $X$ 与 $Y$ 不独立.**

**注：**

**$X$ 与 $Y$ 不相关——仅针对线性关系而言；**
**$X$ 与 $Y$ 相互独立——针对一般关系而言.**

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |

**然而，$P\{X=0,Y=1\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{1}{8}\times\frac{6}{8}$，所以 $X$ 与 $Y$ 不独立.**

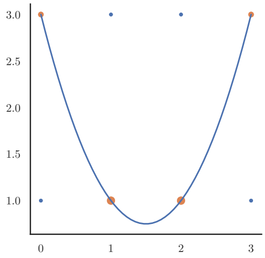
**注：**

**$X$ 与 $Y$ 不相关——仅针对线性关系而言；**

**$X$ 与 $Y$ 相互独立——针对一般关系而言.**

**事实上，本例中 $X$ 与 $Y$ 虽然不相关，但是存在二次函数关系，故也是不独立的.**

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |




**然而，$P\{X=0,Y=1\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{1}{8}\times\frac{6}{8}$，所以 $X$ 与 $Y$ 不独立.**

**注：**

**$X$ 与 $Y$ 不相关——仅针对线性关系而言；**
**$X$ 与 $Y$ 相互独立——针对一般关系而言.**

**事实上，本例中 $X$ 与 $Y$ 虽然不相关，但是存在二次函数关系，故也是不独立的.**

## 例 6

设 $(X, Y)$ 服从二维正态分布，

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

证明 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是：$X$ 与 $Y$ 不相关.

**例 6**

设 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

证明 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是：$X$ 与 $Y$ 不相关.

证明： 因为二维正态分布的边缘分布是一维正态分布，故

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

**例 6**

设 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

证明 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是：$X$ 与 $Y$ 不相关.

证明：　因为二维正态分布的边缘分布是一维正态分布，故

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

故 $E(X)=\mu_1, E(Y)=\mu_2, D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2.$

**例 6**

设 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

证明 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是：$X$ 与 $Y$ 不相关.

**证明：** 因为二维正态分布的边缘分布是一维正态分布，故

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

故 $E(X)=\mu_1,E(Y)=\mu_2,D(X)=\sigma_1^2,D(Y)=\sigma_2^2$.

又因为 $\operatorname{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\sigma_1\sigma_2$

**所以**

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

**所以**

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$$

**已经证明，当 $(X,Y)$ 服从二维正态分布时，$X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $\rho=0$，所以 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $X$ 与 $Y$ 不相关.**

所以

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$$

已经证明，当 $(X,Y)$ 服从二维正态分布时，$X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $\rho=0$，所以 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $X$ 与 $Y$ 不相关.

注：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

(1) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;

(2) $E(X)=\mu_1,E(Y)=\mu_2,D(X)=\sigma_1^2,D(Y)=\sigma_2^2,\rho_{XY}=\rho$;

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$;

(4) $X$ 与 $Y$ 相互独立与 $X$ 与 $Y$ 不相关等价.

# 矩与协方差矩阵

# 矩的定义

**定义 9**

**设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量**

**(1) 若 $E\left(X^k\right), k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩;**

**定义 9**

设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量

(1) 若 $E\left(X^k\right), k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩;

(2) 若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}, k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩;

# 矩的定义

**定义 9**

设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量

(1) 若 $E\left(X^k\right), k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩;

(2) 若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}, k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩;

(3) 若 $E\left(X^kY^l\right), k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩;

# 矩的定义

**定义 9**

**设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量**

(1) **若 $E\left(X^k\right), k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩;**

(2) **若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}, k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩;**

(3) **若 $E\left(X^kY^l\right), k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩;**

(4) **若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\left[Y-E(Y)\right]^l\right\}, k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩中心矩.**

## 矩的定义

**定义 9**

设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量

(1) 若 $E\left(X^k\right), k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩;

(2) 若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}, k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩;

(3) 若 $E\left(X^kY^l\right), k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩;

(4) 若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\left[Y-E(Y)\right]^l\right\}, k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩中心矩.

# 矩的定义

**定义 9**
设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量

(1) 若 $E\left(X^k\right), k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶（原点）矩;

(2) 若 $E\left\{[X-E(X)]^k\right\}, k=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 的 $k$ 阶中心矩;

(3) 若 $E\left(X^kY^l\right), k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩;

(4) 若 $E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}, k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称其为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ 阶混合矩中心矩.

注：随机变量 $X$ 的数学期望和方差分别是 $X$ 的 1 阶原点矩和 2 阶中心矩.
随机变量 $X$ 和 $Y$ 的协方差是 $X$ 和 $Y$ 的 2 阶混合中心矩.

## 协方差矩阵的定义

**定义 10**

设二维随机变量 $(X_1, X_2)$ 的四个二阶混合中心矩都存在，分别记为

$$c_{11} = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = E\left\{\left[X_1 - E(X_1)\right]^2\right\}$$
$$c_{12} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E\left\{\left[X_1 - E(X_1)\right]\left[X_2 - E(X_2)\right]\right\}$$
$$c_{21} = \mathrm{Cov}(X_2, X_1) = E\left\{\left[X_2 - E(X_2)\right]\left[X_1 - E(X_1)\right]\right\}$$
$$c_{22} = \mathrm{Cov}(X_2, X_2) = E\left\{\left[X_2 - E(X_2)\right]^2\right\}$$

将矩阵 $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ 称为随机变量 $(X_1, X_2)$ 的协方差矩阵.

# 协方差矩阵的定义

**定义 11**

设 $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩 $c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\left\{\left[X_i - E(X_i)\right]\left[X_j - E(X_j)\right]\right\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$ 都存在，称矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵.

# 协方差矩阵的定义

**定义 11**

设 $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩 $c_{ij} = \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E\left\{\left[X_i - E(X_i)\right]\left[X_j - E(X_j)\right]\right\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$ 都存在，称矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵.

**注：**

(1) 由协方差的性质 $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \operatorname{Cov}(X_j, X_i)$，协方差矩阵是对称矩阵.

(2) 协方差矩阵主对角线上的元素为 $D(X_i), i = 1, 2, \cdots, n$.

**例 1**

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布律及边缘分布律如表格所示，求 $(X,Y)$ 的协方差矩阵.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 1 | 0.4 | 0.4 | 0.8 |
| $p_{i\cdot}$ | 0.5 | 0.5 | 1 |

**例 1**

**设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的分布律及边缘分布律如表格所示，求 $(X, Y)$ 的协方差矩阵.**

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 1 | 0.4 | 0.4 | 0.8 |
| $p_{i\cdot}$ | 0.5 | 0.5 | 1 |

**解：计算可得**

$$E(X) = 0.5, E(Y) = 0.8, D(X) = 0.25, D(Y) = 0.16, E(XY) = 0.4$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0, \mathrm{Cov}(X, X) = D(X) = 0.25, \mathrm{Cov}(Y, Y) = D(Y) = 0.16$$

**所以协方差矩阵为** $C = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}$

**例 2**

设 $(X, Y)$ 服从二维正态分布,

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

求 $(X, Y)$ 的协方差矩阵.

**例 2**

设 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

求 $(X,Y)$ 的协方差矩阵.

解：因为

$$D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2, \mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$$

**例 2**

设 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

求 $(X,Y)$ 的协方差矩阵.

解：因为

$$D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2, \mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$$

所以 $(X,Y)$ 的协方差矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

**注 1:**
二维正态随机变量 $(X_1, X_2)$ 的概率密度函数为

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

引入向量和矩阵，将二维正态概率密度改写成另外一种形式. 令

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

由 $(X_1, X_2)$ 的协方差矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

可计算 $C$ 的行列式和逆矩阵

$$\det \boldsymbol{C} = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2), \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{bmatrix}$$

因为

$$(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{C}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})=\frac{-1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

于是二维正态随机变量的概率密度可以写为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}(\det\boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{C}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

**注 2:**
$n$ 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det\boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{C}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

其中 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\top},\boldsymbol{\mu}=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]^{\top},\boldsymbol{C}$ 为协方差矩阵.

**定理 12**

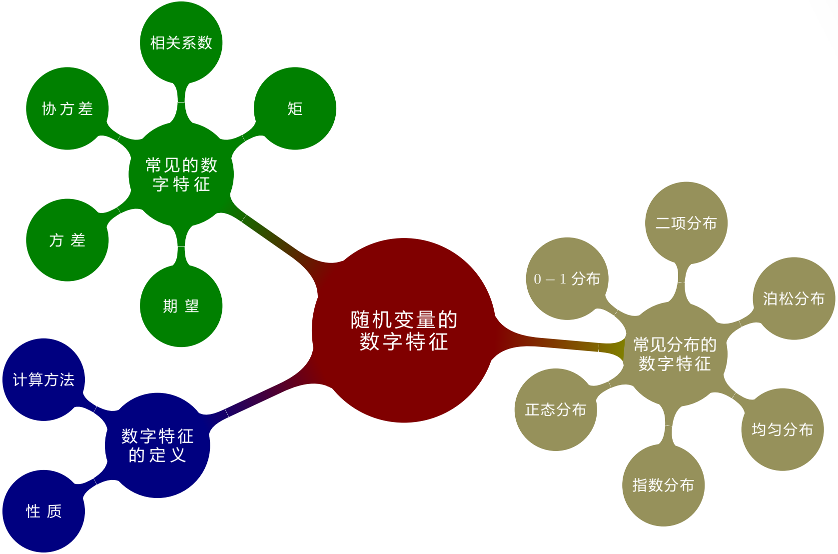
(1) $n$ 维正态随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是正态随机变量；反之，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态随机变量，且相互独立，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $n$ 维正态随机变量；

(2) $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 $n$ 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_2X_n$ 服从一维正态分布（其中 $k_1, k_2, \cdot, k_n$ 不全为零)；

(3) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 $n$ 维正态分布，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关是等价的.

# 随机变量的数字特征习题

# 知识点总结



相关系数
协方差
矩
常见的数字特征
方差
期望
随机变量的数字特征
二项分布
0 – 1 分布
泊松分布
常见分布的数字特征
正态分布
均匀分布
指数分布
计算方法
数字特征的定义
性质

**例 1**

设 $X$ 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 $0.4$, 则 $X^2$ 的均值 $E(X^2) =$ ____.

**例 1**

设 $X$ 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 $0.4$, 则 $X^2$ 的均值 $E(X^2) =$ ____.

解: 由题意可知 $X \sim b(10, 0.4)$, 从而 $E(X) = 4, D(X) = 2.4$,

**例 1**

设 $X$ 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 $0.4$, 则 $X^2$ 的均值 $E(X^2) =$ ____.

解: 由题意可知 $X \sim b(10, 0.4)$，从而 $E(X) = 4, D(X) = 2.4$，

故

$$E(X^2) = D(X) + \left[E(X)\right]^2 = 18.4$$

**例 1**

**设 $X$ 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射中目标的概率为 $0.4$, 则 $X^2$ 的均值 $E(X^2) = \underline{18.4}$.**

**解: 由题意可知 $X \sim b(10, 0.4)$, 从而 $E(X) = 4, D(X) = 2.4$,**
**故**

$$E(X^2) = D(X) + \left[E(X)\right]^2 = 18.4$$

**例 2**

设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X \geq D(X)\} =$ ________.

**例 2**

**设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X \geq D(X)\} =$ ________.**

**解：** $X \sim P(1)$，则 $D(X) = 1$，有

$$P\{X \geq D(X)\} = P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1}$$

**例 2**

设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X \geq D(X)\} = \underline{1 - e^{-1}}$.

**解：** $X \sim P(1)$，则 $D(X) = 1$，有

$$P\{X \geq D(X)\} = P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1}$$

**例 3**

**设随机变量** $X$ **服从参数为 2 的指数分布，则随机变量** $Y = 2X + e^{-2X}$ **的数学期望** $E(Y) =$ ________.

**例 3**

**设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，则随机变量 $Y=2X+e^{-2X}$ 的数学期望 $E(Y)=$ ______.**

**解：**

$$E(Y)=E\left(2X+e^{-2X}\right)=2E(X)+E\left(e^{-2X}\right)$$

**例 3**

**设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，则随机变量 $Y=2X+e^{-2X}$ 的数学期望 $E(Y)=$ ______.**

**解：**

$$E(Y)=E\left(2X+e^{-2X}\right)=2E(X)+E\left(e^{-2X}\right)$$

$$=2\times\frac{1}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)\mathrm{d}x$$

**例 3**

**设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，则随机变量 $Y=2X+e^{-2X}$ 的数学期望 $E(Y)=$ ______.**

**解:**

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E\left(2X+e^{-2X}\right) = 2E(X)+E\left(e^{-2X}\right)\\
&= 2\times\frac{1}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)\mathrm{d}x\\
&= 1+\int_{0}^{+\infty} e^{-2x} 2e^{-2x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

**例 3**

**设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，则随机变量 $Y=2X+e^{-2X}$ 的数学期望 $E(Y)=$ $\underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$.**

**解:**

$$E(Y)=E\left(2X+e^{-2X}\right)=2E(X)+E\left(e^{-2X}\right)$$
$$=2\times\frac{1}{2}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=1+\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}2e^{-2x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{2}$$

**例 4**

**设随机变量** $X$ **与** $Y$ **满足** $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，**则** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

**例 4**

**设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足** $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，**则** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

**解：** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

**例 4**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，则 $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

**解：** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$D(2X-Y+1)$

**例 4**

**设随机变量** $X$ **与** $Y$ **满足** $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$**，则** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

**解：** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4\operatorname{Cov}(X,Y)$

**例 4**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，则 $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

解：$E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$$\begin{aligned} D(2X-Y+1) &= 4D(X)+D(Y)-4\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\ &= 4D(X)+D(Y)-4\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} \end{aligned}$$

**例 4**

**设随机变量** $X$ **与** $Y$ **满足** $E(X)=1,E(Y)=2,D(X)=1,D(Y)=4,\rho_{XY}=0.6$，**则** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

**解：** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$$
\begin{aligned}
D(2X-Y+1)&=4D(X)+D(Y)-4\,\mathrm{Cov}(X,Y)\\
&=4D(X)+D(Y)-4\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\
&=4\times 1+4-4\times 0.6\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3.2
\end{aligned}
$$

**例 4**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，则 $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

解：$E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$$\begin{aligned} D(2X-Y+1) &= 4D(X)+D(Y)-4\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\ &= 4D(X)+D(Y)-4\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} \\ &= 4\times 1+4-4\times 0.6\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3.2 \end{aligned}$$

$$\left[E(2X-Y+1)\right]^2=\left[2E(X)-E(Y)+1\right]^2=1$$

**例 4**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，则 $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ______.

**解：** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$$\begin{aligned}D(2X-Y+1)&=4D(X)+D(Y)-4\operatorname{Cov}(X,Y)\\&=4D(X)+D(Y)-4\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=4\times1+4-4\times0.6\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3.2\end{aligned}$$

$$\left[E(2X-Y+1)\right]^2=\left[2E(X)-E(Y)+1\right]^2=1$$

**故** $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=3.2+1=4.2$

例 4

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.6$，则 $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=$ ___4.2___.

解：$E\left[(2X-Y+1)^2\right]=D(2X-Y+1)+\left[E(2X-Y+1)\right]^2$

$$\begin{aligned} D(2X-Y+1) &= 4D(X)+D(Y)-4\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\ &= 4D(X)+D(Y)-4\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} \\ &= 4\times 1+4-4\times 0.6\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3.2 \end{aligned}$$

$$\left[E(2X-Y+1)\right]^2=\left[2E(X)-E(Y)+1\right]^2=1$$

故 $E\left[(2X-Y+1)^2\right]=3.2+1=4.2$

**例 5**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(XY) = E(X)E(Y)$，则 ______ 正确.

(A) $D(XY) = D(X)D(Y)$

(B) $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$

(C) $X$ 与 $Y$ 独立

(D) $X$ 与 $Y$ 不独立

**例 5**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则 ______ 正确.

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$

(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $X$ 与 $Y$ 独立

(D) $X$ 与 $Y$ 不独立

$$X\text{与}Y\text{独立} \Rightarrow X\text{与}Y\text{不相关} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=0 \\ \quad\Updownarrow \\ \mathrm{Cov}(X,Y)=0 \\ \quad\Updownarrow \\ E(XY)=E(X)E(Y) \\ \quad\Updownarrow \\ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y) \end{cases}$$

**例 5**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 满足 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则 $\underline{\quad B \quad}$ 正确.

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$

(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $X$ 与 $Y$ 独立

(D) $X$ 与 $Y$ 不独立

$$X\text{与}Y\text{独立} \Rightarrow X\text{与}Y\text{不相关} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=0 \\ \quad\Updownarrow \\ \mathrm{Cov}(X,Y)=0 \\ \quad\Updownarrow \\ E(XY)=E(X)E(Y) \\ \quad\Updownarrow \\ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y) \end{cases}$$

## 例 6

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 都服从正态分布，则 ______.

(A) $X+Y$ 服从一维正态分布

(B) $X$ 与 $Y$ 不相关等价于独立

(C) $(X,Y)$ 服从二维正态分布

(D) $(X,-Y)$ 未必服从正态分布

**例 6**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 都服从正态分布，则 $\underline{\quad D \quad}$.

(A) $X+Y$ 服从一维正态分布

(B) $X$ 与 $Y$ 不相关等价于独立

(C) $(X,Y)$ 服从二维正态分布

(D) $(X,-Y)$ 未必服从正态分布

**例 6**

**设随机变量 $X$ 与 $Y$ 都服从正态分布，则 $\underline{\quad D \quad}$.**

(A) $X+Y$ 服从一维正态分布　　(B) $X$ 与 $Y$ 不相关等价于独立

(C) $(X, Y)$ 服从二维正态分布　　(D) $(X, -Y)$ 未必服从正态分布

**解：** 假设 $X$ 服从标准正态分布，其分布函数为 $\Phi(x)$，设 $Z$ 是离散型随机变量且与 $X$ 相互独立，其分布律为

| $Z$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

**例 6**

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 都服从正态分布，则 $\underline{\quad D \quad}$.

(A) $X+Y$ 服从一维正态分布　　(B) $X$ 与 $Y$ 不相关等价于独立

(C) $(X,Y)$ 服从二维正态分布　　(D) $(X,-Y)$ 未必服从正态分布

解：假设 $X$ 服从标准正态分布，其分布函数为 $\Phi(x)$，设 $Z$ 是离散型随机变量且与 $X$ 相互独立，其分布律为

| $Z$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

令 $Y=ZX$，则 $Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\}$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y|Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y|Z=1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z = -1\}P\{ZX \le y | Z = -1\} + P\{Z = 1\}P\{ZX \le y | Z = 1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y | Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y | Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y|Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

**故 $Y$ 也服从标准正态分布.**

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y | Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y | Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

**故 $Y$ 也服从标准正态分布. 考虑概率** $P\{X+Y=0\}$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y | Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y | Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

故 $Y$ 也服从标准正态分布. 考虑概率 $P\{X+Y=0\}$

$$
P\{X+Y=0\} = P\{X+ZX=0\}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y|Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

**故 $Y$ 也服从标准正态分布. 考虑概率** $P\{X+Y=0\}$

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y=0\} &= P\{X+ZX=0\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{X+ZX=0|Z=-1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y|Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

**故 $Y$ 也服从标准正态分布. 考虑概率** $P\{X+Y=0\}$

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y=0\} &= P\{X+ZX=0\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{X+ZX=0|Z=-1\} \\
&\quad + P\{Z=1\}P\{X+ZX=0|Z=1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y|Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

故 $Y$ 也服从标准正态分布. 考虑概率 $P\{X+Y=0\}$

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y=0\} &= P\{X+ZX=0\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{X+ZX=0|Z=-1\} \\
&\quad + P\{Z=1\}P\{X+ZX=0|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X-X=0\} + \frac{1}{2}P\{X+X=0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{ZX \le y\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{ZX \le y|Z=-1\} + P\{Z=1\}P\{ZX \le y|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \le y\} + \frac{1}{2}P\{X \le y\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\Phi(-y)) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)
\end{aligned}
$$

**故 $Y$ 也服从标准正态分布. 考虑概率** $P\{X+Y=0\}$

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y=0\} &= P\{X+ZX=0\} \\
&= P\{Z=-1\}P\{X+ZX=0|Z=-1\} \\
&\quad + P\{Z=1\}P\{X+ZX=0|Z=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X-X=0\} + \frac{1}{2}P\{X+X=0\} \\
&= \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

**因为 $X,Y$ 均服从标准正态分布，但是 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$，可知 $X+Y$ 一定不是正态分布，选项（A）不正确.**

因为 $X, Y$ 均服从标准正态分布，但是 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$，可知 $X+Y$ 一定不是正态分布，选项（A）不正确.

下面计算 $X$ 与 $Y$ 的协方差，注意到 $Y=ZX$，且 $X$ 和 $Z$ 相互独立.

**因为 $X, Y$ 均服从标准正态分布，但是 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$，可知 $X+Y$ 一定不是正态分布，选项（A）不正确.**

**下面计算 $X$ 与 $Y$ 的协方差，注意到 $Y=ZX$，且 $X$ 和 $Z$ 相互独立.**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,ZX)=E(ZX^2)-E(X)E(ZX)$$

因为 $X,Y$ 均服从标准正态分布，但是 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$，可知 $X+Y$ 一定不是正态分布，选项（A）不正确.

下面计算 $X$ 与 $Y$ 的协方差，注意到 $Y=ZX$，且 $X$ 和 $Z$ 相互独立.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X,ZX) = E(ZX^2) - E(X)E(ZX) \\ &= E(Z)E(X^2) = 0\end{aligned}$$

**因为 $X, Y$ 均服从标准正态分布，但是 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$，可知 $X+Y$ 一定不是正态分布，选项（A）不正确.**

**下面计算 $X$ 与 $Y$ 的协方差，注意到 $Y=ZX$，且 $X$ 和 $Z$ 相互独立.**

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \operatorname{Cov}(X, ZX) = E(ZX^2) - E(X)E(ZX) \\ &= E(Z)E(X^2) = 0\end{aligned}$$

**所以 $X$ 与 $Y$ 相关系数 $\rho_{XY}=0$，$X$ 与 $Y$ 不相关，但是由 $Y$ 的构造方式 $Y=ZX$ 可知，$X$ 与 $Y$ 不独立，所以选项（B）不正确.**

因为 $X,Y$ 均服从标准正态分布，但是 $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2}$，可知 $X+Y$ 一定不是正态分布，选项（A）不正确.

下面计算 $X$ 与 $Y$ 的协方差，注意到 $Y=ZX$，且 $X$ 和 $Z$ 相互独立.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\mathrm{Cov}(X,ZX)=E(ZX^2)-E(X)E(ZX)\\&=E(Z)E(X^2)=0\end{aligned}$$

所以 $X$ 与 $Y$ 相关系数 $\rho_{XY}=0$，$X$ 与 $Y$ 不相关，但是由 $Y$ 的构造方式 $Y=ZX$ 可知，$X$ 与 $Y$ 不独立，所以选项（B）不正确.

由定理可知，当两个一维正态分布的任意线性组合（系数不全为零）服从正态分布时，$(X,Y)$ 服从二维正态分布. 所以选项（C）不正确.

**例 7**

**设二维随机变量** $(X, Y)$ **服从正态分布** $N(1, 0, 1, 1, 0)$，**则** $P\{XY - Y < 0\} = $ ______.

**例 7**

**设二维随机变量** $(X,Y)$ **服从正态分布** $N(1,0,1,1,0)$，**则** $P\{XY-Y<0\}=$ ______.

**解：因为** $(X,Y)\sim N(1,0,1,1,0)$，**则** $X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$，**且由** $\rho=0$，**可知** $X$ **与** $Y$ **相互独立.**

$$P\{XY-Y<0\}=P\{Y(X-1)<0\}$$

**例 7**
设二维随机变量 $(X, Y)$ 服从正态分布 $N(1,0,1,1,0)$，则 $P\{XY - Y < 0\} =$ ______.

解：因为 $(X,Y) \sim N(1,0,1,1,0)$，则 $X \sim N(1,1), Y \sim N(0,1)$，且由 $\rho = 0$，可知 $X$ 与 $Y$ 相互独立.

$$
\begin{aligned}
P\{XY - Y < 0\} &= P\{Y(X-1) < 0\} \\
&= P\{Y < 0, X - 1 > 0\} + P\{Y > 0, X - 1 < 0\}
\end{aligned}
$$

**例 7**

**设二维随机变量 $(X,Y)$ 服从正态分布 $N(1,0,1,1,0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ _____.**

**解：因为 $(X,Y)\sim N(1,0,1,1,0)$，则 $X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$，且由 $\rho=0$，可知 $X$ 与 $Y$ 相互独立.**

$$
\begin{aligned}
P\{XY-Y<0\} &= P\{Y(X-1)<0\} \\
&= P\{Y<0, X-1>0\} + P\{Y>0, X-1<0\} \\
&= P\{X>1\}P\{Y<0\} + P\{X<1\}P\{Y>0\} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

**例 7**

**设二维随机变量** $(X,Y)$ **服从正态分布** $N(1,0,1,1,0)$**，则** $P\{XY-Y<0\}=$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

**解：因为** $(X,Y)\sim N(1,0,1,1,0)$**，则** $X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$**，且由** $\rho=0$**，可知** $X$ **与** $Y$ **相互独立.**

$$
\begin{aligned}
P\{XY-Y<0\} &= P\{Y(X-1)<0\} \\
&= P\{Y<0, X-1>0\}+P\{Y>0, X-1<0\} \\
&= P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

**例 8**

袋中有标记号码为 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n$ 个球，从中有放回地取出 $k$ 个球，以 $X$ 表示取出球的号码之和，求 $E(X), D(X)$.

**例 8**

**袋中有标记号码为 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n$ 个球，从中有放回地取出 $k$ 个球，以 $X$ 表示取出球的号码之和，求 $E(X), D(X)$.**

**解：设随机变量 $X_i, (i = 1, 2, \cdots, k)$ 表示取出的第 $i$ 个球的号码，因为有放回取球，所以 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 相互独立且具有相同的分布律，分布律为**

**例 8**

**袋中有标记号码为 $1,2,\cdots,n$ 的 $n$ 个球，从中有放回地取出 $k$ 个球，以 $X$ 表示取出球的号码之和，求 $E(X), D(X)$.**

**解：设随机变量 $X_i,(i=1,2,\cdots,k)$ 表示取出的第 $i$ 个球的号码，因为有放回取球，所以 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 相互独立且具有相同的分布律，分布律为**

| $X_i$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

**例 8**

**袋中有标记号码为 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n$ 个球，从中有放回地取出 $k$ 个球，以 $X$ 表示取出球的号码之和，求 $E(X), D(X)$.**

**解：设随机变量 $X_i, (i = 1, 2, \cdots, k)$ 表示取出的第 $i$ 个球的号码，因为有放回取球，所以 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 相互独立且具有相同的分布律，分布律为**

| $X_i$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

**故取出的 $k$ 个球的号码之和可表示为 $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$.**

**例 8**

袋中有标记号码为 $1,2,\cdots,n$ 的 $n$ 个球，从中有放回地取出 $k$ 个球，以 $X$ 表示取出球的号码之和，求 $E(X),D(X)$.

解：设随机变量 $X_i,(i=1,2,\cdots,k)$ 表示取出的第 $i$ 个球的号码，因为有放回取球，所以 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 相互独立且具有相同的分布律，分布律为

| $X_i$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

故取出的 $k$ 个球的号码之和可表示为 $X=\sum_{i=1}^{k}X_i$.

$$E(X_i)=\sum_{t=1}^{n}tP\{X_i=t\}=\sum_{t=1}^{n}\left(t\times\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$$

| $X_i$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

$$E(X_i^2)=\sum_{t=1}^{n} t^2 P\{X_i=t\}=\sum_{t=1}^{n}\left(t^2\times\frac{1}{n}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

| $X_i$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

$$E(X_i^2) = \sum_{t=1}^{n} t^2 P\{X_i = t\} = \sum_{t=1}^{n} \left(t^2 \times \frac{1}{n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - \left[E(X_i)\right]^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

| $X_i$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

$$E(X_i^2) = \sum_{t=1}^{n} t^2 P\{X_i = t\} = \sum_{t=1}^{n} \left( t^2 \times \frac{1}{n} \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - \left[ E(X_i) \right]^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

**因此由期望的性质和方差的性质有**

| $X_i$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

$$E(X_i^2)=\sum_{t=1}^{n}t^2P\{X_i=t\}=\sum_{t=1}^{n}\left(t^2\times\frac{1}{n}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-\left[E(X_i)\right]^2=\frac{n^2-1}{12}$$

**因此由期望的性质和方差的性质有**

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=\frac{k(n+1)}{2}$$

| $X_i$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $p_t$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{n}$ |

$$E(X_i^2)=\sum_{t=1}^{n}t^2P\{X_i=t\}=\sum_{t=1}^{n}\left(t^2\times\frac{1}{n}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-\left[E(X_i)\right]^2=\frac{n^2-1}{12}$$

**因此由期望的性质和方差的性质有**

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=\frac{k(n+1)}{2}$$

$$D(X)=D\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}D(X_i)=\frac{k(n^2-1)}{12}$$

**例 9**

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布律如表格所示.

(1) 求 $P\{X=2Y\}$; (2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$; (3) 判断 $X$ 与 $Y$ 是否相关? 是否独立?

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

**例 9**

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布律如表格所示.

(1) 求 $P\{X=2Y\}$；(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$；(3) 判断 $X$ 与 $Y$ 是否相关？是否独立？

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

解：(1) $$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

**例 9**

**设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的分布律如表格所示.**
**(1) 求 $P\{X=2Y\}$; (2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y, Y)$; (3) 判断 $X$ 与 $Y$ 是否相关? 是否独立?**

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

**解: (1)** 

$$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

**(2) 求得 $X, Y$ 的边缘分布律如表格所示**

**例 9**

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布律如表格所示.

(1) 求 $P\{X=2Y\}$；(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$；(3) 判断 $X$ 与 $Y$ 是否相关? 是否独立?

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

解：(1) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}$

$$+P\{X=2,Y=1\}$$

$$=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

(2) 求得 $X,Y$ 的边缘分布律如表格所示

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $p_{i\cdot}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

计算得 $E(X)=1, E(Y)=\frac{2}{3}, E(XY)=\frac{2}{3}$,
故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$
计算得 $E(Y^2)=1$，故
$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{5}{9}$. 则

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\frac{5}{9}.$$

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $p_{i\cdot}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

计算得 $E(X)=1, E(Y)=\frac{2}{3}, E(XY)=\frac{2}{3}$，
故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$
计算得 $E(Y^2)=1$，故
$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{5}{9}$. 则

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\frac{5}{9}.$$

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $p_{i\cdot}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

(3) 由于 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，故 $\rho=0$，因此 $X$ 与 $Y$ 不相关.

$X$ 与 $Y$ 的联合分布律与边缘分布律，不满足对于任意的 $i,j$ 有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，
故 $X$ 与 $Y$ 不独立.

**例 10**

二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1）$E(X),E(Y)$；（2）$D(X),D(Y)$；（3）$\rho_{XY}$.

**例 10**

二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1）$E(X),E(Y)$；（2）$D(X),D(Y)$；（3）$\rho_{XY}$.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^2\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$

**例 10**

**二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为**

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**求（1）** $E(X),E(Y)$；**（2）** $D(X),D(Y)$；**（3）** $\rho_{XY}$.

**解：（1）** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^2\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^3\mathrm{d}y=\frac{3}{5}$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{75}$$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{75}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x 12y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5}$$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{75}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{1}{25}$$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{75}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{1}{25}$$

(3) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{75}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{1}{25}$$

(3) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

**例 11**

**设随机变量 $X$ 的概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$$

**求（1）$E(X)$；（2）求 $X$ 与 $|X|$ 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,|X|)$；**
**(3）判断 $X$ 与 $|X|$ 是否相互独立?**

**例 11**

**设随机变量 $X$ 的概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$$

**求（1）$E(X)$；（2）求 $X$ 与 $|X|$ 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,|X|)$；（3）判断 $X$ 与 $|X|$ 是否相互独立?**

**解：（1）** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}\mathrm{d}x=0$

**例 11**

**设随机变量 $X$ 的概率密度为**

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$$

**求（1）$E(X)$；（2）求 $X$ 与 $|X|$ 的协方差 $\operatorname{Cov}(X,|X|)$；（3）判断 $X$ 与 $|X|$ 是否相互独立?**

**解：（1）** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}\mathrm{d}x=0$

**（2）** $\operatorname{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|e^{-|x|}\mathrm{d}x-0=0$

**因 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$，可验证 $D(X)>0, D(|X|)>0$，故 $X$ 与 $|X|$ 不相关.**

因 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$，可验证 $D(X)>0, D(|X|)>0$，故 $X$ 与 $|X|$ 不相关.

(3) 令 $Y=|X|$，可知 $X$ 与 $Y$ 存在函数关系，即 $X$ 与 $|X|$ 存在函数关系，故 $X$ 与 $|X|$ 不独立.

因 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$，可验证 $D(X)>0, D(|X|)>0$，故 $X$ 与 $|X|$ 不相关.

(3) 令 $Y=|X|$，可知 $X$ 与 $Y$ 存在函数关系，即 $X$ 与 $|X|$ 存在函数关系，故 $X$ 与 $|X|$ 不独立.

另外也可以通过

$$P\{X\le 1,|X|\le 1\}\neq P\{X\le 1\}P\{|X|\le 1\}$$

可知 $X$ 与 $|X|$ 不独立.

**例 12**

设 $X$ 与 $Y$ 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的随机变量，求 $E(|X-Y|), D(|X-Y|)$.

## 例 12

设 $X$ 与 $Y$ 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的随机变量，求 $E(|X-Y|), D(|X-Y|)$.

解：$X$ 与 $Y$ 相互独立且均服从正态分布 $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$，令 $Z=X-Y$，则

$$Z=X-Y \sim N(0,1)$$

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z| f_Z(z) \mathrm{d} z=2 \int_0^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{2 \pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d} z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

**例 12**

设 $X$ 与 $Y$ 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的随机变量，求 $E(|X-Y|),D(|X-Y|)$.

解：$X$ 与 $Y$ 相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，令 $Z=X-Y$，则

$$Z=X-Y\sim N(0,1)$$

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f_Z(z)\mathrm{d}z=2\int_{0}^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|X-Y|^2)=E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+\left[E(Z)\right]^2=1$$

**例 12**

设 $X$ 与 $Y$ 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的随机变量，求 $E(|X-Y|),D(|X-Y|)$.

解：$X$ 与 $Y$ 相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，令 $Z=X-Y$，则

$$Z=X-Y\sim N(0,1)$$

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f_Z(z)\mathrm{d}z=2\int_{0}^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|X-Y|^2)=E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+\left[E(Z)\right]^2=1$$

故 $D(|X-Y|)=E\left(|X-Y|^2\right)-\left[E(|X-Y|)\right]^2=1-\frac{2}{\pi}.$

**例 13**

**在区间 $[0,1]$ 上任取 $n$ 个数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，试求这 $n$ 个数的最大值和最小值的数学期望.**

**例 13**

**在区间 $[0,1]$ 上任取 $n$ 个数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，试求这 $n$ 个数的最大值和最小值的数学期望.**

**解：由题意可知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，分布函数记为**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

**例 13**

**在区间 $[0,1]$ 上任取 $n$ 个数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，试求这 $n$ 个数的最大值和最小值的数学期望.**

**解：由题意可知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，分布函数记为**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

**记最大值为 $M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，最小值为 $N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.**

$M$ 的分布函数为

$$F_M(z) = F^n(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ z^n, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \ge 1. \end{cases}$$

$M$ 的概率密度为

$$f_M(z) = F_M'(z) = \begin{cases} nz^{n-1}, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$M$ 的数学期望为

$$E(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_M(z) \mathrm{d}z = \int_0^1 n z^n \mathrm{d}z = \frac{n}{n+1}$$

$N$ 的分布函数为

$$F_N(z) = 1 - \left[1 - F(z)\right]^n = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1 - (1-z)^n, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

$N$ 的概率密度为

$$f_N(z) = F_N'(z) = \begin{cases} n(1-z)^{n-1}, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$N$ 的数学期望为

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_N(z) \mathrm{d}z = \int_0^1 z n(1-z)^{n-1} \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}$$

**例 14**

设 $A, B$ 是两个随机事件，随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{出现}, \\ 0, & A\text{不出现}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{出现}, \\ 0, & B\text{不出现}.\end{cases}$$

证明随机变量 $X$ 与随机变量 $Y$ 不相关的充要条件是 $A$ 与 $B$ 相互独立.

## 例 14

设 $A, B$ 是两个随机事件，随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{出现},\\ 0, & A\text{不出现}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{出现},\\ 0, & B\text{不出现}.\end{cases}$$

证明随机变量 $X$ 与随机变量 $Y$ 不相关的充要条件是 $A$ 与 $B$ 相互独立.

解：由题意可知 $X, Y, XY$ 的分布律分别为

| $X$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-P(A)$ | $P(A)$ |

,

| $Y$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-P(B)$ | $P(B)$ |

| $XY$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-P(AB)$ | $P(AB)$ |

显然 $X, Y, XY$ 均服从 $0-1$ 分布，数学期望为

$$E(X) = P(A), E(Y) = P(B), E(XY) = P(AB)$$

显然 $X, Y, XY$ 均服从 $0-1$ 分布，数学期望为

$$E(X)=P(A), E(Y)=P(B), E(XY)=P(AB)$$

**必要性** 已知随机变量 $X$ 与 $Y$ 不相关，可知 $E(XY)=E(X)E(Y)$，从而

显然 $X, Y, XY$ 均服从 $0-1$ 分布，数学期望为

$$E(X)=P(A), E(Y)=P(B), E(XY)=P(AB)$$

**必要性** 已知随机变量 $X$ 与 $Y$ 不相关，可知 $E(XY)=E(X)E(Y)$，从而

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

故事件 $A$ 与 $B$ 独立.

显然 $X, Y, XY$ 均服从 $0-1$ 分布，数学期望为

$$E(X)=P(A), E(Y)=P(B), E(XY)=P(AB)$$

**必要性**　已知随机变量 $X$ 与 $Y$ 不相关，可知 $E(XY)=E(X)E(Y)$，从而

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

故事件 $A$ 与 $B$ 独立.

**充分性**　已知事件 $A$ 与 $B$ 独立，可知 $P(AB)=P(AP(B)$，从而有

显然 $X, Y, XY$ 均服从 $0-1$ 分布，数学期望为

$$E(X)=P(A), E(Y)=P(B), E(XY)=P(AB)$$

**必要性**　已知随机变量 $X$ 与 $Y$ 不相关，可知 $E(XY)=E(X)E(Y)$，从而

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

故事件 $A$ 与 $B$ 独立.

**充分性**　已知事件 $A$ 与 $B$ 独立，可知 $P(AB)=P(AP(B)$，从而有

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

故 $X$ 与 $Y$ 不相关.

# 概率论与数理统计

**概率论与数理统计教研团队**[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

**2024 年　春**

大工至善
大学至真

哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY