概率论与数理统计

Probability and Statistics

—概率论与数理统计教学组—

哈尔滨工程大学

第3章 多维随机变量及其分布

3.6 两个随机变量函数的分布

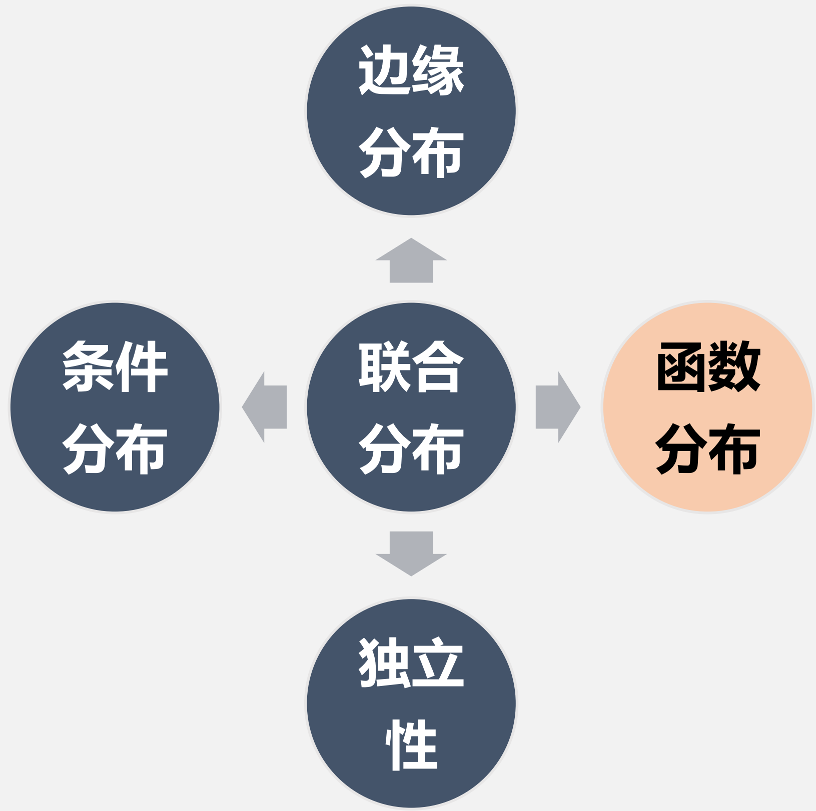
学习要点

- 两个离散型随机变量函数的分布
- 两个连续型随机变量函数的分布
- 常见两个连续型随机变量函数的分布

两个随机变量函数的分布

一、 两个随机变量函数的分布引言

设(X,Y)为一个二维随机变量，$z=g(x,y)$为一个已知的二元连续函数，则$Z=g(x,y)$是随机变量X,Y的函数，它也是一个随机变量.



二、两个离散型随机变量函数的分布

问题： 设(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$$

求X,Y的函数$Z=g(X,Y)$的分布律.

计算步骤：

1．先求出Z的所有可能的取值

$$\{z_l;l=1,2,\cdots\}=\{g(x_i,y_j);i,j=1,2,\cdots\}$$

2．求Z取每个值的概率.

$$P\{Z=z_l\}=\sum_{g(x_i,y_j)=z_l}p_{ij},l=1,2,\cdots$$

例 1 设随机变量 X,Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p	0.6	0.4

(1) 求 $Z=X+Y$ 的分布律； (2) 求 $M=\max(X,Y)$ 的分布律.

解(1) 由 X 可能取 0, 1, 2, Y 可能取 0, 2，则 $Z=X+Y$ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，且 $P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0.5\times0.6=0.3$;

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0.3\times0.6=0.18$;

$P\{Z=2\}=P\{X=2,Y=0\}+P\{X=0,Y=2\}=0.12+0.2=0.32$;

$P\{Z=3\}=P\{X=1,Y=2\}=0.3\times0.4=0.12$;

$P\{Z=4\}=P\{X=2,Y=2\}=0.2\times0.4=0.08$.

综上，$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	0	1	2	3	4
p	0.3	0.18	0.32	0.12	0.08

例 1 设随机变量 X,Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p	0.6	0.4

（1）求 $Z=X+Y$ 的分布律；（2）求 $M=\max(X,Y)$ 的分布律.

解（2）由 X 可能取 $0, 1, 2$, Y 可能取 $0, 2$, 则 $M=\max(X,Y)$ 的所有可能取值为 $0, 1, 2$, 且

$$P\{M=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0.5\times 0.6=0.3;$$

$$P\{M=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0.3\times 0.6=0.18;$$

$$P\{M=2\}=1-P\{M=0\}-P\{M=1\}=0.52.$$

综上，$M=\max(X,Y)$ 的分布律为

M	0	1	2
p	0.3	0.18	0.52

三、两个连续型随机变量函数的分布

问题： 已知二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，求X,Y的函数$Z=g(X,Y)$的概率密度$f_Z(z)$.

计算步骤（分布函数法）

1．求分布函数

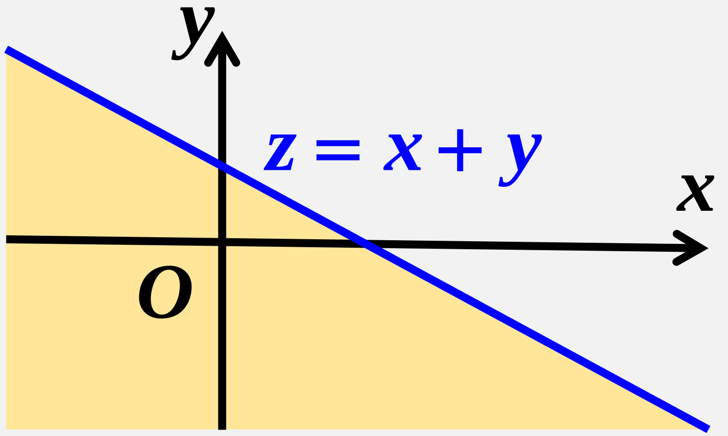
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2．求概率密度

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

两个随机变量函数的分布

四、$Z=X+Y$ 的分布



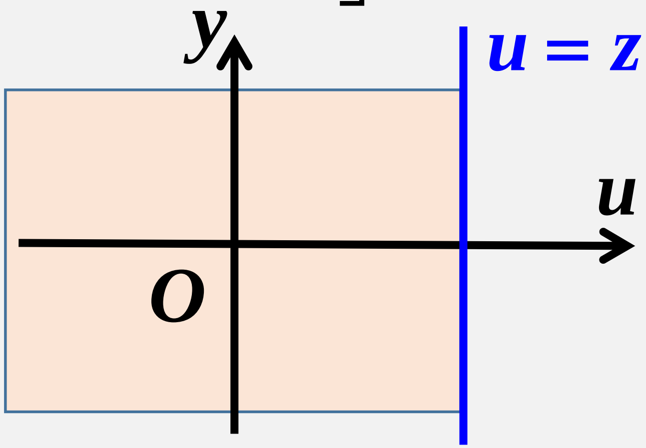
步骤 1： 设(X,Y)概率密度为$f(x,y)$，

则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \overset{令u=x+y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$\overset{交换累次积分次序}{=} \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$



步骤 2： $f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,\ y)\mathrm{d}y$，

类似有： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)\mathrm{d}x$.

四、$Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)概率密度为$f(x,y)$，则$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{f(z-y,\ y)}\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{f(x,\ z-x)}\mathrm{d}x.$$

当X和Y独立时：

$$\boxed{f_X(z-y)f_Y(y)} \qquad \boxed{f_X(x)f_Y(z-x)}$$

定理 1 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x\,.$$

当X,Y**相互独立**时，若X,Y的边缘概率密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x\,.$$

上述公式称为**卷积公式**，记为$f_X * f_Y$，即

$$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x\,.$$

例 2 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$； $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},-\infty<y<+\infty$，

则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\mathrm{d}x\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}=e^{-\frac{1}{2}\left(2x^2-2xz+z^2\right)}=e^{-\frac{1}{2}\left[2(x-\frac{z}{2})^2+\frac{z^2}{2}\right]}=e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot e^{-(x-\frac{z}{2})^2}$$

例 2 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$； $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},-\infty<y<+\infty$，

则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\frac{z}{2})^2}\mathrm{d}x\ \overset{t=x-\frac{z}{2}}{=}\ \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\boxed{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}\quad(-\infty<z<+\infty)$$

$Z=X+Y$ 服从 $N(0,2)$ 分布

更一般得到如下结论:

(1) 设 X,Y **相互独立**且 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 则 $Z = X + Y$ 仍服从正态分布, 且有

$$Z \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

(2) 若 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$, 且它们**相互独立**, 则这 n 个正态随机变量之和 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 仍服从正态分布

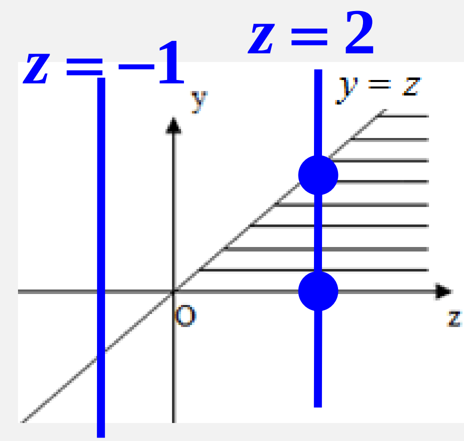
$$Z \sim N(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2).$$

(3) 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合, 仍然服从正态分布.

两个随机变量函数的分布

例 3 设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求$Z=X+Y$的概率密度.



解 Z的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y,$

当$z\le 0$时，对$y\in(-\infty,+\infty)$有$f(z-y,y)=0$，

当$z>0$时，在$y\in(0,z)$上$f(z-y,y)=2e^{-[2(z-y)+y]}$；

仅在$z-y>0$，$y>0$时，有$f(z-y,y)\ne 0$，

在$y\notin(0,z)$上$f(z-y,y)=0$.

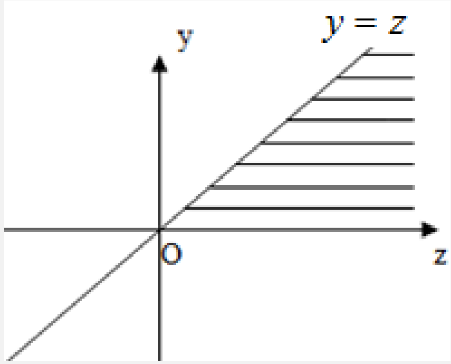
即仅在图中阴影部分有$f(z-y,y)\ne 0$，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2\int_0^{z}e^{\cdots}\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2e^{-z}-2e^{-2z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3 设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求$Z=X+Y$的概率密度.



解 Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}2\int_0^z e^{-[2(z-y)+y]}\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2e^{-z}-2e^{-2z}, & z>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

同学们在写作业或答题时，按照这个样式书写即可，分析过程可不写。

两个随机变量函数的分布

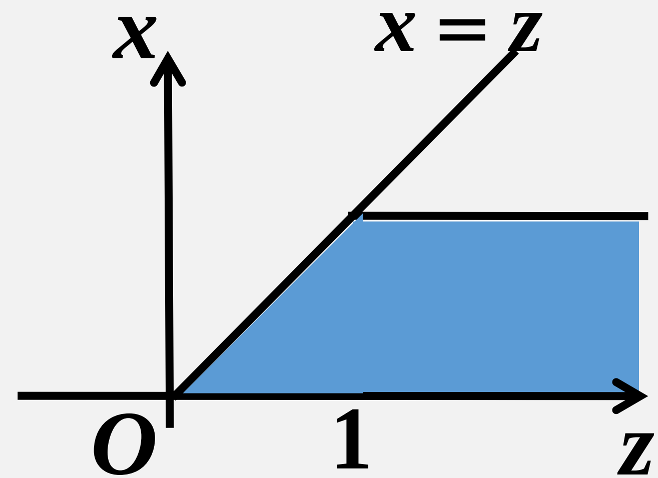
Harbin Engineering University

例 4 设 X,Y 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

已知 X,Y 相互独立，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由 X,Y 相互独立，$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$



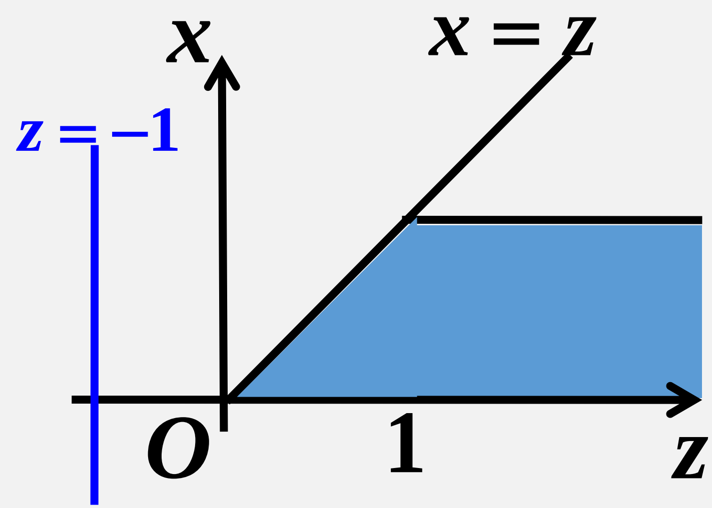
仅在 $x\in[0,1]$，$z-x>0$ 时，有 $f_X(x)\,f_Y(z-x)\neq 0$，

即仅在图中阴影部分有 $f_X(x)\,f_Y(z-x)\neq 0$，

已知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases} & \\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

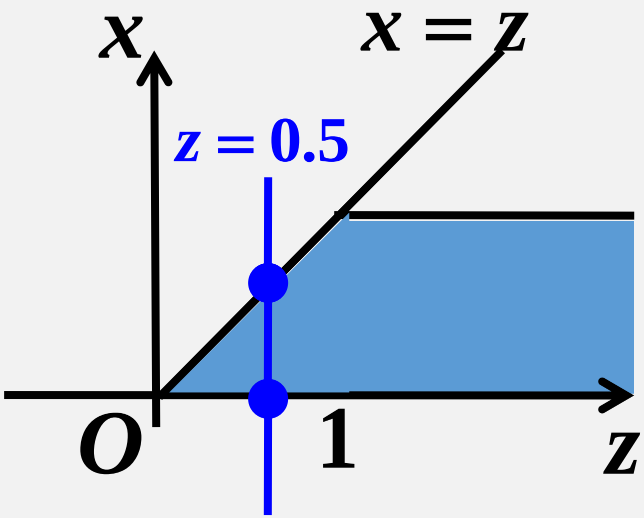


当$z\le 0$时，对$x\in(-\infty,+\infty)$有 $f_X(x)\,f_Y(z-x)=0$，

已知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}, & 0<z\le 1,\\ \\ 0, & z\le 0\end{cases}$$



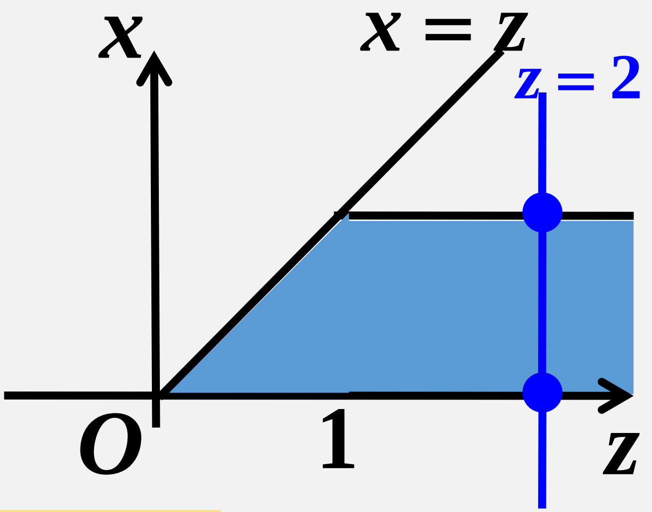
当$0<z\le 1$时，在$x\in(0,z)$上 $f_X(x)f_Y(z-x)=e^{-(z-x)}$；

在$x\notin(0,z)$上 $f_X(x)f_Y(z-x)=0$.

已知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}, & 0<z\le 1,\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=e^{-z}(e-1), & z>1,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$



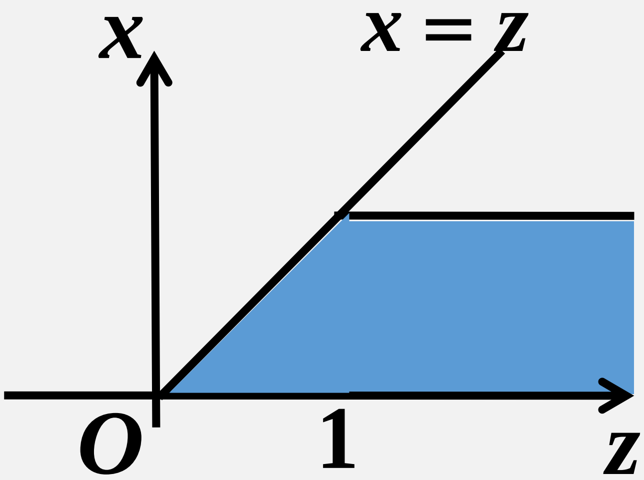
当$z>1$时，在$x\in(0,1)$上$f_X(x)f_Y(z-x)=e^{-(z-x)}$；

在$x\notin(0,1)$上$f_X(x)f_Y(z-x)=0$.

例4 设 X,Y 密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

已知 X,Y 相互独立，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由 X,Y 相互独立，$Z=X+Y$ 的概率密度为



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}, & 0<z\le 1,\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=e^{-z}(e-1), & z>1,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

同学们在写作业或答题时，按照这个样式书写即可，分析过程可不写.

五、$Z = X - Y$ 的分布

定理 2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z = X - Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)dy .$$

当 X,Y 相互独立时，若 X,Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z+y) f_Y(y)dy .$$

证明略.

六、$Z=\dfrac{X}{Y}$、 $W=XY$ 的分布

定理 3 设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=\dfrac{X}{Y}$、$W=XY$ 的概率密度分别为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\mathrm{d}y、\quad f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{w}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

当 X,Y **相互独立**时，若 X,Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$， $f_Y(y)$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y、\quad f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{w}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

证明略.

两个随机变量函数的分布

哈爾濱工程大學 Harbin Engineering University

例 5 设 X,Y 概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

已知 X,Y 相互独立，求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度.

解 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\, f_X(yz)\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yz}\cdot 2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}y=\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

当 $z\le 0$ 时，$yz>0$ 与 $y>0$ 不能同时成立，$f_X(yz)$ 与 $f_Y(y)$ 中至少有一个为零，则 $f_X(yz)\,f_Y(y)=0$

当 $z>0$ 时，当 $y\in(-\infty,\ 0]$ 时，$f_X(yz)\,f_Y(y)=0$

当 $y\in(0,\ +\infty)$ 时，$f_X(yz)\,f_Y(y)=\mathrm{e}^{-yz}\cdot 2\mathrm{e}^{-2y}$

例 6 设 X,Y 相互独立，均服从 $N(0,1)$ 分布，求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解 由已知在 $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$ 上，X,Y 的概率密度分别为，

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},$$

则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)\,f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\mathrm{e}^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi(1+z^2)},\qquad -\infty<z<+\infty.$$

七、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设随机变量X和Y**相互独立**，分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则

$$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=P\{N\le z\}=1-P\left\{\min\left(X,Y\right)>z\right\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}=1-[1-P\{X\le z\}][1-P\{Y\le z\}]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

两个随机变量函数的分布

更一般地，设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是n个**相互独立**的随机变量，分布函数分别为$F_{X_1}(x),\ F_{X_2}(x),\ \cdots,\ F_{X_n}(x)$，

令 $M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$、$N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，则

$$F_M(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]$$

当$X_1, X_2, \cdots, X_n$**相互独立**且具有**相同分布函数**$F(x)$时，有

$$F_M(z) = [F(z)]^n$$

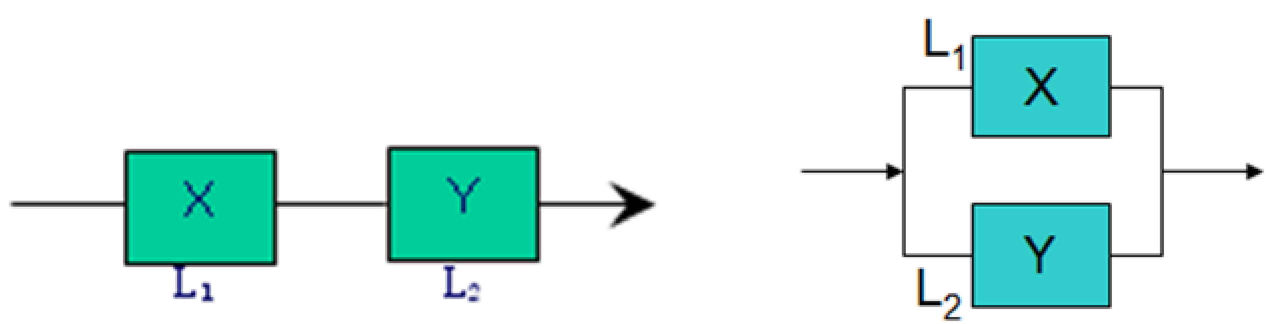
$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

例 7 设系统L由两个相互独立的子系统L_1,L_2连接而成，设L_1,L_2的寿命分别为随机变量X,Y，它们的概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}，\text{其中}\alpha>0,\beta>0.$$

如图求系统L在(1) 串联、(2) 并联两种情况下的寿命Z_1和Z_2的概率密度.

解 由题意$Z_1=\min\{X,Y\}$，$Z_2=\max\{X,Y\}$.



(1) 串联　　(2) 并联

两个随机变量函数的分布

已知：X,Y **相互独立**，$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求$Z_1=\min\{X,Y\}$和$Z_2=\max\{X,Y\}$的概率密度，其中$\alpha>0,\beta>0$.

解 X,Y 的分布函数分别为：

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Z_1的分布函数为：$F_{Z_1}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

Z_1的概率密度为：$f_{Z_1}(z)=F'_{Z_1}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

两个随机变量函数的分布

已知：X,Y **相互独立**，$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

求 $Z_1=\min\{X,Y\}$ 和 $Z_2=\max\{X,Y\}$ 的概率密度，其中 $\alpha>0,\beta>0$.

解 X,Y 的分布函数分别为：

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

Z_2 的分布函数为：$F_{Z_2}(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

Z_2 的概率密度为：$f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

例 8 对某种电子装置的输出测量 5 次，得到观察值 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5，设他们是相互独立的随机变量且均服从参数为 $\sigma = 2$ 的瑞利分布，即 X_i 的分布函数为

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{8}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad (i = 1,2,3,4,5).$$

求：(1) $Z = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ 的分布函数，(2) $P\{Z > 4\}$.

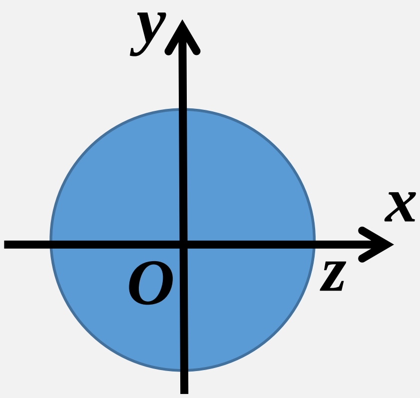
解 (1) $$F_{\max}(z) = [F(z)]^5 = \begin{cases} (1 - e^{-\frac{z^2}{8}})^5, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

(2) $P\{Z > 4\} = 1 - P\{Z \leq 4\} = 1 - F_{\max}(4) = 1 - (1 - e^{-2})^5 = 0.5167.$

例 9 设X,Y相互独立，且都服从$N\left(0,\sigma^2\right)$，求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度.

解 由题意，在$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$上(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$



Z的分布函数为：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$，

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=0$；

当$z>0$时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$

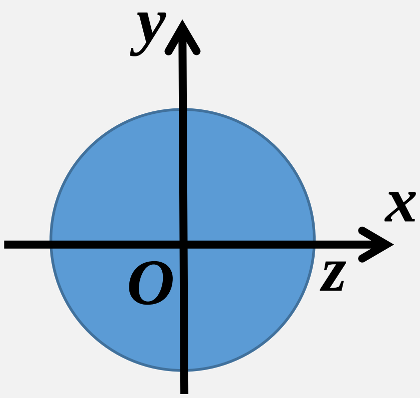
$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}r=\int_0^z\frac{r}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

两个随机变量函数的分布

例 9 设 X,Y 相互独立，且都服从 $N\left(0,\sigma^2\right)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

解 由题意，在 $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$ 上 (X,Y) 的概率密度为

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$



Z 的分布函数为：$F_Z\left(z\right)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=0$；

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=\int_0^z\frac{r}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$

故 Z 的概率密度为：
$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

小结 两个随机变量函数的分布

- 两个离散型随机变量函数的分布
- 两个连续型随机变量函数的分布思想
- 常见两个连续型随机变量函数的分布

谢谢您的观看

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY