第3章 线性系统的运动分析

3.1 引 言

一．运动分析的数学实质

线性系统的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad t \in [t_0, t_\alpha]$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad t \geq 0$$

- 运动分析的目的：从系统数学模型出发，定量地和精确地定出系统运动的变化规律，以便为系统的实际运动过程做出估计。

- 数学实质：相对于给定的初始状态$\boldsymbol{x}_0$和外输入作用$\boldsymbol{u}$，求解出状态方程的解$\boldsymbol{x}(t)$，即由初始状态和外输入作用所引起的状态响应。

二. 零输入响应和零初态响应

系统在初始状态和输入向量作用下的运动分解为两个单独的分运动，即*由初始状态引起的自由运动*和由*输入作用引起的强迫运动*。

1. 零输入响应

零输入响应：指系统输入$\boldsymbol{u}$为零时，由初始状态$\boldsymbol{x}_0$单独作用所引起的运动。即状态方程

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad t \in [t_0, t_\alpha]}$$

的解，用$\boldsymbol{x}_{0u}(t)$表示。

2. 零初态响应

零初态响应：指系统初始状态$\boldsymbol{x}_0$为零时，由系统输入$\boldsymbol{u}$单独作用所引起的运动。即状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}, \qquad t \in \left[t_0, t_\alpha\right]$$

的解，用$x_{0x}(t)$表示。

系统总的运动响应 $x(t)$ 是零输入响应和零初态响应的叠加，即

$$x(t) = \boldsymbol{x}_{0u}(t) + x_{0x}(t)$$

3.2 线性时不变系统的运动分析

一. 零输入响应

输入$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$时，线性定常系统的状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\qquad t\geq 0$$

称为齐次状态方程。求线性定常系统的零输入响应，其实就是求该齐次状态方程的解。

1. 矩阵指数函数

定义$n\times n$的矩阵函数

$$e^{At}\underline{\Delta}I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

为矩阵指数函数。

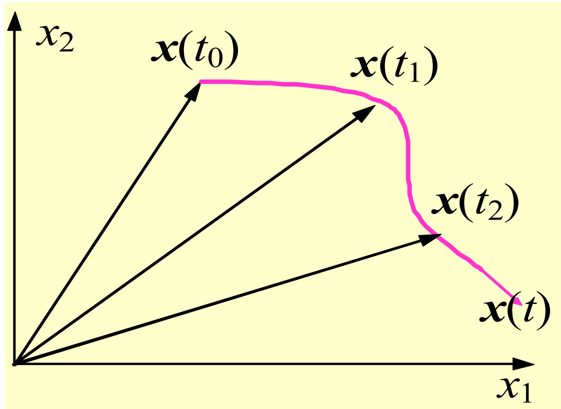
2. 零输入响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,\quad t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_{0u}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\quad t \geq t_0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_{0u}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0}$$

说明：零输入响应即自由运动轨线的形态，仅由系统的矩阵指数函数唯一确定。

如何求矩阵指数函数？



证：设 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \geq 0$ 的解为：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t + \boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{b}_k t^k, \qquad t \geq 0 \qquad \text{（a）}$$

带入状态方程

$$\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 t + 3\boldsymbol{b}_3 t^2 + \cdots = A\boldsymbol{b}_0 + A\boldsymbol{b}_1 t + A\boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots$$

比较t^k两边的系数向量

$$\boldsymbol{b}_1 = A\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2}A\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2!}A^2\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{3}A\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3!}A^3\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_k = \frac{1}{k}A\boldsymbol{b}_{k-1} = \frac{1}{k!}A^k\boldsymbol{b}_0, \cdots$$

代回（a）式

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \right)\boldsymbol{b}_0, \qquad t \geq 0$$

$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \right)x_0 = e^{At}x_0, \qquad t \geq 0$$

3. 矩阵指数函数性质

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$$

(1) $$\boxed{\lim_{t\to 0} e^{At} = I}$$

(2) $$(e^{At})^T = e^{A^T t}$$

(3) 令 t和 τ 为两个自变量，则必成立

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At}\cdot e^{A\tau} = e^{A\tau}\cdot e^{At}$$

(4) $$\boxed{(e^{At})^{-1} = e^{-At}}$$

（5）设有n×n常阵A和F, 如果A和F是可交换的，则必成立

$$e^{(A+F)t} = e^{At} \cdot e^{Ft} = e^{Ft} \cdot e^{At}$$

(6) $$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

（7）对给定方阵A，必成立

$$(e^{At})^m = e^{A(mt)}, m = 0,1,2,\cdots$$

4 矩阵指数函数的计算方法

如何求矩阵指数函数？

方法一：定义法

直接利用矩阵指数函数的定义式计算，即

$$\boxed{e^{At}=\mathrm{I}+At+\cdots+\frac{1}{k!}A^{k}t^{k}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^{k}t^{k}}$$

说明：该方法只能得到e^{At}的数值结果，一般不能写成闭合形式。实际计算时，可取前有限项给出近似结果。

$$e^{At}\approx\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^{k}t^{k}$$

其中：N可根据实际系统精度要求确定。

(1) 当矩阵*A*为对角线矩阵，即 $A = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$时

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

$$= I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} t^2 + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k t^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

(2) 当矩阵A具有如下形式

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则A是幂零矩阵，即自乘若干次后化成零矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^k=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, k=3,4,5\cdots$$

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k=\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}A^k t^k=\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

推广到如下形式的*n*阶方阵：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2\,!} & \dfrac{t^3}{3\,!} & \cdots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)\,!} \\ 0 & 1 & t & \dfrac{t^2}{2\,!} & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)\,!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \dfrac{t^2}{2\,!} \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 当*A*具有如下形式

$$A=\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}$$

由矩阵指数函数定义，有

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}-\omega^2 & 0\\ 0 & -\omega^2\end{bmatrix}+\frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix}0 & -\omega^3\\ \omega^3 & 0\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2!}\omega^2t^2+\frac{1}{4!}\omega^4t^4+\cdots & \omega t-\frac{1}{3!}\omega^3t^3+\frac{1}{5!}\omega^5t^5+\cdots\\ -\omega t+\frac{1}{3!}\omega^3t^3-\frac{1}{5!}\omega^5t^5+\cdots & 1-\frac{1}{2!}\omega^2t^2+\frac{1}{4!}\omega^4t^4+\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}$$

例： 求下列系统状态方程的解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

解：

$$e^{At} = \mathrm{I} + At + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^2 = A^3 = \cdots = A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵指数函数： $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

状态方程的解： $x(t) = e^{At}x(0) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$

方法二：特征值法

◆ 利用对角形变换求解

当A的n个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两互异时，由属于各个特征值的右特征向量组成变换矩阵 $P^{-1}=\begin{bmatrix}\upsilon_1 & \upsilon_2 & \cdots & \upsilon_n\end{bmatrix}$，在变换 $\bar{x}=Px$ 作用下化A为对角线规范形 $\bar{A}=PAP^{-1}$

$$A=P^{-1}\bar{A}P=P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P$$

则有：

$$e^{At}=P^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P$$

方法三：预解矩阵法(拉氏反变换法)

对给定的$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$常阵$\boldsymbol{A}$，
$$\boxed{e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]}$$

证明：
$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=x_0$$

$$\Big\downarrow\ \text{拉氏变换}$$

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}_0=A\boldsymbol{X}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$(sI-A)\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}_0$$

$$\Big\downarrow\ (\boldsymbol{sI}\text{-}\boldsymbol{A})\text{非奇异}$$

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-A)^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

$$\Big\downarrow\ \text{拉氏反变换}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]\boldsymbol{x}_0$$

$$\Big\downarrow\ x(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0$$

$$\boxed{e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]}$$

例：求下列状态方程的解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

解：**1）特征矩阵:** $s\boldsymbol{I} - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$

2）预解矩阵: $(s\boldsymbol{I} - A)^{-1} = \dfrac{adj(s\boldsymbol{I} - A)}{|s\boldsymbol{I} - A|} = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

3）矩阵指数函数：

$$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4）状态方程的解：

$$x(t)=e^{At}x(0)\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

二. 零初态响应

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ x(0) = 0,\ \ t \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_{0x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ \ t \geq 0}$$

变量替换

$$\boxed{x_{0x}(t) = \int_0^t e^{A\tau} B\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau,\ \ t \geq 0}$$

该形式更便于计算

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ x(t_0) = 0,\ \ t \geq t_0 \Rightarrow \boxed{x_{0x}(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ \ t \geq t_0}$$

证：

$$\frac{d}{dt}e^{-At}x=\left(\frac{d}{dt}e^{-At}\right)x+e^{-At}\dot{x}=e^{-At}\left(\dot{x}-Ax\right)=e^{-At}Bu(t)$$

对上式从**0**至***t***进行积分

$$e^{-At}x(t)-x(0)=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$x(0)=0$，上式两边左乘$\boldsymbol{e^{At}}$

$$x(t)=\int_0^t e^{At}e^{-A\tau}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

三．线性定常系统的状态运动规律

初始状态$\boldsymbol{x}_0$和外输入作用$\boldsymbol{u}$共同作用下的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \geq 0$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \geq t_0$$

的解，可由零输入响应和零初态响应叠加而得出。

主要方法有如下两种：

$$\begin{cases} \text{积分法} \\ \text{拉氏变换法} \end{cases}$$

1. 积分法：

在求出系统矩阵指数函数 e^{At} 的基础上，直接利用公式计算：

$$x(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau, \qquad t \ge 0$$

变量替换

$$\boxed{x(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau} B\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau, \qquad t \ge 0}$$

该形式更便于计算

2．拉氏变换法：

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}[\boldsymbol{x}_0+B\boldsymbol{U}(s)]\right\}$$

证明：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\qquad x(0)=x_0,\quad t\geq 0$$

拉氏变换

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}_0=A\boldsymbol{X}(s)+B\boldsymbol{U}(s)$$

$$(sI-A)\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}_0+B\boldsymbol{U}(s)$$

（***sI-A***）非奇异

$$\boldsymbol{X}(s)=(sI-A)^{-1}[\boldsymbol{x}_0+B\boldsymbol{U}(s)]$$

拉氏反变换

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}[\boldsymbol{x}_0+B\boldsymbol{U}(s)]\right\}$$

例：已知系统的状态空间描述和初始条件如下：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}6 & 1\end{bmatrix}x$$

求系统在单位阶跃输入$\boldsymbol{u(t)=1(t)}$作用下的状态响应和输出响应。

解：

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ -\dfrac{6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{s+2}-\dfrac{2}{s+3} & \dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3} \\ \dfrac{6}{s+3}-\dfrac{6}{s+2} & \dfrac{3}{s+3}-\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

1）积分法:

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\begin{bmatrix} 3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 6e^{-3t}-6e^{-2t} & 3e^{-3t}-2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

由于：$u(t)=1$ ，所以 $u(t-\tau)=1$

$$x(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A\tau}B\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ 6e^{-3t}-6e^{-2t} & 3e^{-3t}-2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}3e^{-2\tau}-2e^{-3\tau} & e^{-2\tau}-e^{-3\tau}\\ 6e^{-3\tau}-6e^{-2\tau} & 3e^{-3\tau}-2e^{-2\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}4e^{-2t}-3e^{-3t}\\ 9e^{-3t}-8e^{-2t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2\tau}-e^{-3\tau}\\ 3e^{-3\tau}-2e^{-2\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}4e^{-2t}-3e^{-3t}\\ 9e^{-3t}-8e^{-2t}\end{bmatrix}+\left.\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{-2\tau}+\frac{1}{3}e^{-3\tau}\\ -e^{-3\tau}+e^{-2\tau}\end{bmatrix}\right|_0^t$$

$$=\begin{bmatrix}4e^{-2t}-3e^{-3t}\\ 9e^{-3t}-8e^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{6}\\ -e^{-3t}+e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t}+\frac{1}{6}\\ 8e^{-3t}-7e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=cx(t)=\begin{bmatrix}6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t}+\frac{1}{6}\\ 8e^{-3t}-7e^{-2t}\end{bmatrix}=1+14e^{-2t}-8e^{-3t}$$

2）拉氏变换法：

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-A)^{-1}\{B\boldsymbol{U}(s)+\boldsymbol{x}(0)\}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\\ -\dfrac{6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\cdot\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\\ -\dfrac{6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{s}+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+6s+1}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{s-5}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\left\{X(s)\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+6s+1}{s(s+2)(s+3)}\\[2ex]\dfrac{s-5}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s}\\[2ex]\dfrac{8}{s+3}-\dfrac{7}{s+2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{2}e^{-2t}-\dfrac{8}{3}e^{-3t}+\dfrac{1}{6}\\[2ex]8e^{-3t}-7e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=cx(t)=\begin{bmatrix}6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{7}{2}e^{-2t}-\dfrac{8}{3}e^{-3t}+\dfrac{1}{6}\\[2ex]8e^{-3t}-7e^{-2t}\end{bmatrix}=1+14e^{-2t}-8e^{-3t}$$

3.3 线性定常系统的状态转移矩阵

一．线性定常系统的状态转移矩阵

1．状态转移矩阵的定义

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \geq t_0$$

称满足如下矩阵方程

$$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0), \quad t \geq t_0$$

导数条件

$$\Phi(0) = \boldsymbol{I}$$

初始条件

的$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 为系统的状态转移矩阵。

考虑系统 $\dot{x} = Ax$ 的矩阵指数函数 $\boxed{e^{A(t-t_0)}, \quad t \ge t_0}$

$$\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} = Ae^{A(t-t_0)}$$

导数条件

$$e^{A(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = I_n$$

初始条件

$$\boxed{\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \ge t_0}$$

当$t_0 = 0$时，可将其表为

$$\boxed{\Phi(t) = e^{At}, \quad t \ge 0}$$

结论：线性定常系统的状态转移矩阵就是矩阵指数函数e^{At}

2. 基本解阵的定义

- 由方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ 的任意$\boldsymbol{n}$个线性无关解所构成的$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$矩阵函数 $\psi(t)$ ，称为方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ 的一个基本解阵。

- 基本解阵 $\psi(t)$ 具有如下性质：

$$\dot{\psi}(t) = A\psi(t), \qquad \psi(t_0) = H, \qquad t \geq t_0$$

其中：$\boldsymbol{H}$为非奇异实常值矩阵。

■ 线性定常系统的状态转移矩阵和系统的基本解阵间的一个基本关系式：

$$\Phi(t-t_0)=\psi(t)\psi^{-1}(t_0),\qquad t\geq t_0$$

证明：

$$\dot{\Phi}(t-t_0)=\dot{\psi}(t)\psi^{-1}(t_0)=A\psi(t)\psi^{-1}(t_0)=A\Phi(t-t_0)$$

$$\Phi(0)=\Phi(t_0-t_0)=\Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0)=I$$

3．用状态转移矩阵表示的系统运动规律表达式

$$x(t)=\Phi\left(t-t_0\right)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi\left(t-\tau\right)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\qquad t\ge t_0$$

或

$$x(t)=\Phi\left(t\right)\boldsymbol{x}_0+\int_{0}^{t}\Phi\left(t-\tau\right)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\qquad t\ge 0$$

变量替换

$$x(t)=\Phi\left(t\right)\boldsymbol{x}_0+\int_{0}^{t}\Phi\left(\tau\right)B\boldsymbol{u}(t-\tau)d\tau,\qquad t\ge 0$$

该形式更便于计算

二．线性定常系统的状态转移矩阵的性质

1 $\boxed{\Phi(0) = \mathrm{I}}$

$$\Phi(t-t_0)=\psi(t)\psi^{-1}(t_0)$$

$$\Phi(0)=\psi(t_0)\psi^{-1}(t_0)=\boldsymbol{I}$$

2 $\boxed{\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A}$

3 状态转移矩阵的逆

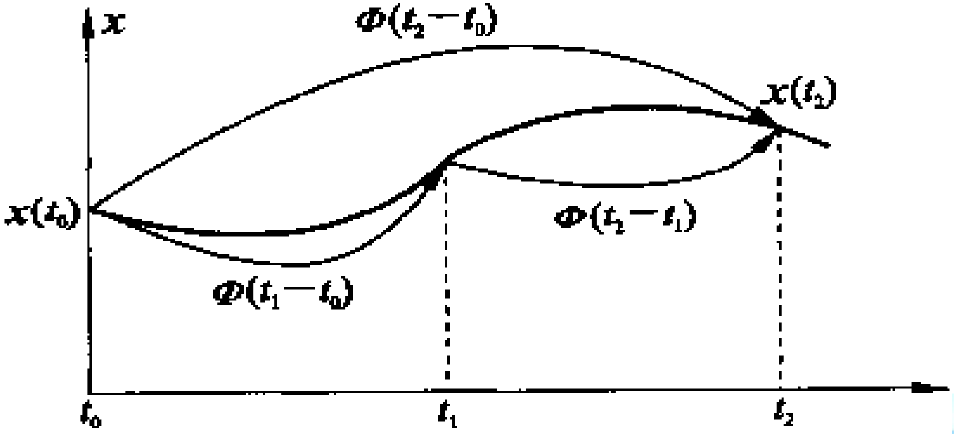
$$\boxed{\Phi^{-1}(t-t_0)=[\psi(t)\psi^{-1}(t_0)]^{-1}=\psi(t_0)\psi^{-1}(t)=\Phi(t_0-t)}$$

$$\boxed{\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t),\quad \Phi^{-1}(-t)=\Phi(t)}$$

4 状态转移矩阵的传递性

$$\boxed{\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)}$$

证明： $$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_1)\bullet\Psi(t_1)\Psi^{-1}(t_0)$$
$$= \Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$$



5 时间变量为独立变量和的状态转移矩阵

$$\boxed{\Phi(t_2+t_1)=\Phi(t_2-(-t_1))=\Phi(t_2-0)\Phi(0-(-t_1))=\Phi(t_2)\Phi(t_1)}$$

6 时间变量数乘的状态转移矩阵

$$\boxed{\Phi(k\,t)=\left[\Phi(t)\right]^k}$$

证明： $\Phi(kt)=\Phi(t+t+\cdots+t)=\Phi(t)\cdot\Phi(t)\cdot\cdots\cdot\Phi(t)=\left[\Phi(t)\right]^k$

7 $\Phi(t-t_0)$由A唯一地确定，当利用

$$\Phi(t-t_0)=\psi(t)\psi^{-1}(t_0),\quad (t\ge t_0)$$

计算时，$\Phi(t-t_0)$与所选择的$\psi(t)$无关。

证明：设$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$是$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$的两个不同的基本解阵，且两者之间成立

$$\psi_2(t)=\psi_1(t)P$$

***P*为非奇异实值常阵**

$$\Phi(t-t_0)=\psi_2(t)\psi_2^{-1}(t_0)=[\psi_1(t)P]\cdot[\psi_1(t_0)P]^{-1}$$
$$=\psi_1(t)PP^{-1}\psi_1^{-1}(t_0)=\psi_1(t)\psi_1^{-1}(t_0)$$

这表明$\Phi(t-t_0)$是满足唯一性的。

例：已知状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试求：$\Phi^{-1}(t), A$

解：1） $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)=\begin{bmatrix} 2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{2t} \\ -2e^{t}+2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t} \end{bmatrix}$

2）根据状态转移矩阵的运算性质有：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= A\Phi(t) \\ \Phi(0) &= I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{\Phi}(0)=A\Phi(0)=A$$

所以：$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

三. 系统的输出响应

线性定常系统在初始状态和外输入同时作用下的状态响应为：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\qquad t\geq t_0$$

则此时，系统的输出响应为：

$$\boxed{y(t)=Cx(t)+Du(t)=Ce^{A(t-t_0)}x_0+C\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t)}$$

3.4 线性时变系统的运动分析

状态转移矩阵定义

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

$$\Phi(t_0,t_0) = I$$

线性时变系统状态转移矩阵

状态转移矩阵计算

$$\Phi(t,t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0),\ t \ge t_0$$

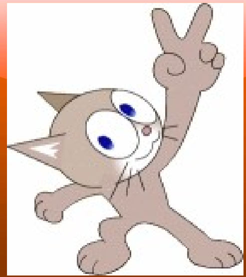
线性时变系统的运动规律

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

状态转移矩阵性质

A $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$

B $\Phi(t_2,t_0)=\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)$



C 当A(t)给定后，状态转移矩阵是唯一的

D 若A(t)与 $\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau$ 是乘积可交换的，则

$$\Phi(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]$$