第4章 线性系统的能控性与能观测性

4.1 能控性和能观测性的定义

4.2 线性连续系统的能控性判据

4.3 线性连续系统的能观测性判据

4.4 对偶性

4.5 能控规范形和能观测规范形

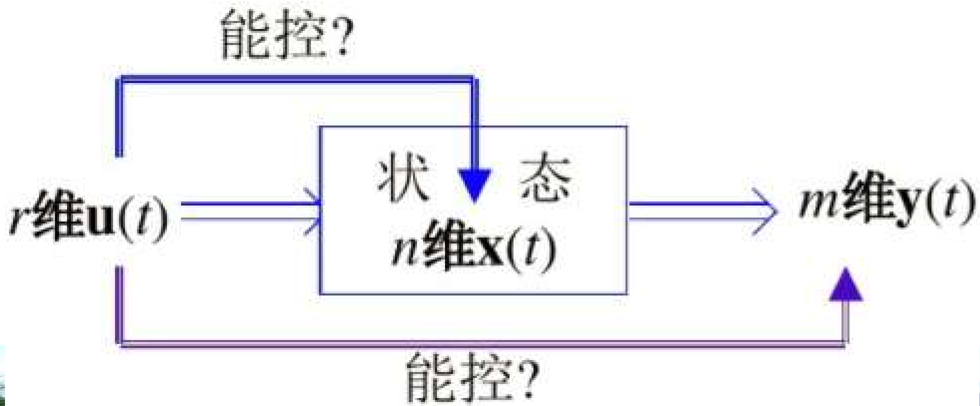
4.6 连续时间线性时不变系统的结构分解

4.1 能控性和能观测性的定义

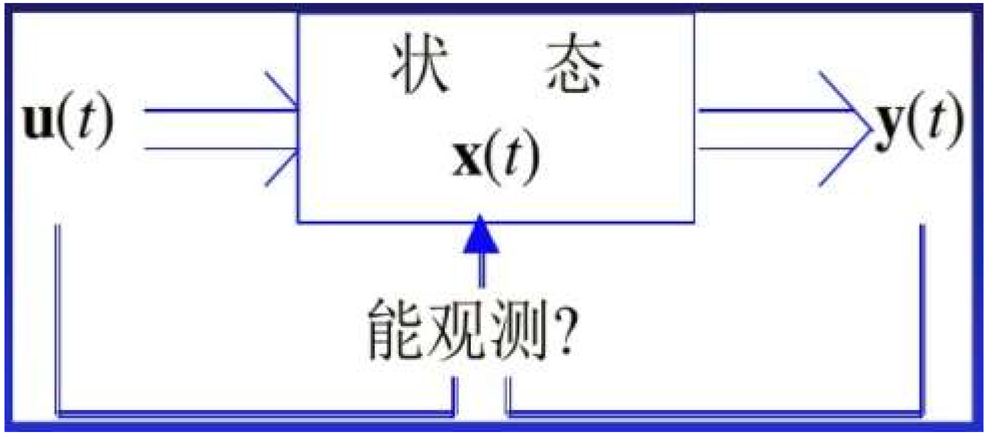
一. 能控性与能观测性的物理概念

系统的能控性和能观性，就是指系统内的所有状态是否可以由输入影响和是否可由输出反映。

□能控性问题:已知某系统的的当前时刻及其状态,试问是否存在一个容许控制,使得系统在该控制的作用下于有限时间后到达某希望的待定状态?



□能观性问题:已知某系统及其在某时间段上的输入输出,试问可否依据这一时间段上的输入和输出决定系统这一时间段上的状态?

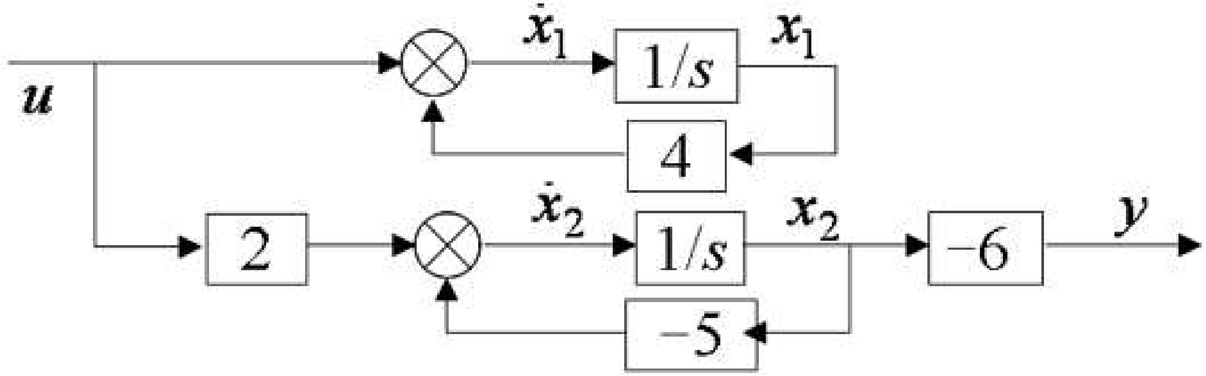


例4-1：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

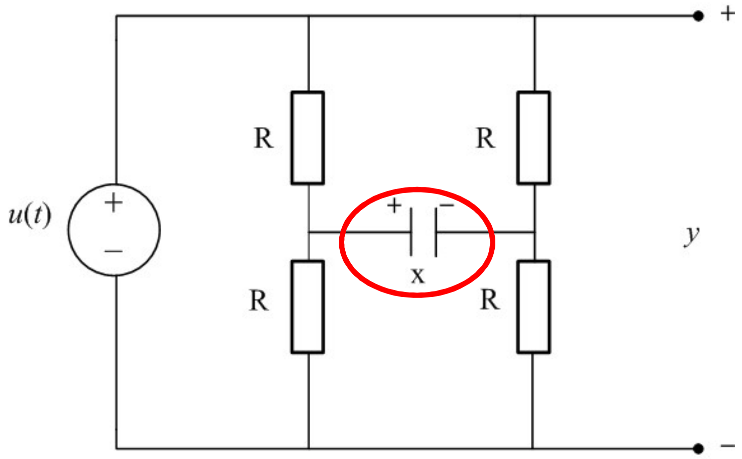
$$y=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=4x_1+u\\ \dot{x}_2&=-5x_2+2u\\ y&=-6x_2\end{aligned}$$



结构图表明：状态x_1和x_2可由输入u完全影响，所以系统状态完全能控；输出y只能反映状态变量x_2，状态变量x_1和输出y既无直接也无间接关系，所以系统状态不完全能观测。

例4-2：桥式电路

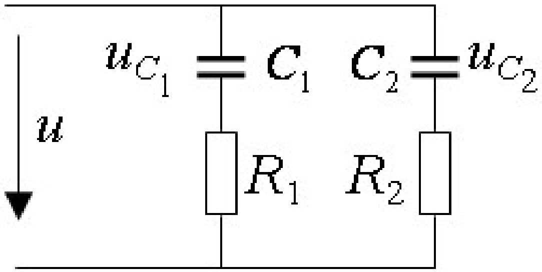


一阶系统，取电容两端电压为状态变量$x(t)$；输入为电压源电压$u(t)$，输出为电压$y(t)$

分析：如果初始状态 $x(t_0)=0$，不管输入$u(t)$如何变化，其引起的电容两端的电位相等，即恒有$x(t)=0$，状态$x(t)$不受$u(t)$的影响，故状态x不能控；令$u(t)=0$，不论电容初始电压即初始状态 $x(t_0)$是多少，恒有$y(t)=0$，即 $x(t_0)$引起的状态运动不能被输出$y(t)$反映，状态$x(t)$是不能观测的。

注意：在某些特殊情况下，与控制输入u有联系的状态变量不一定能控，与输出变量y有联系的状态变量也不一定能观测。

例4-3：



$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_1}\int i_1 dt + R_1 i_1 = u \\ \dfrac{1}{C_2}\int i_2 dt + R_2 i_2 = u \end{cases}$$

选取 $x_1 = u_{c_1}$ ，$x_2 = u_{c_2}$ ，

输入u为电压源电压。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{R_1 C_1}x_1 + \dfrac{1}{R_1 C_1}u \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{R_2 C_2}x_2 + \dfrac{1}{R_2 C_2}u \end{cases}$$

分析：控制量u对状态 x_1和x_2都有控制能力。

特殊情况：当$R_1 = R_2$，$C_1 = C_2$且初始状态 $x_1(t_0) = x_2(t_0)$时，则不论输入$u(t)$ 取作何种形式，只能有$x_1(t) = x_2(t)$ ，不能做到$x_1(t) \neq x_2(t)$，故系统不完全能控。

□如果系统内部每个状态变量的运动都可由输入来影响和控制，而由任意的初始状态达到任意指定终止状态，则称系统是能控的，或者更确切地说是状态能控的，否则就称系统为不完全能控的，或简称为系统不能控。

□如果系统内部每个状态变量的任意形式的运动均可由输出完全反映，则称系统是状态能观测的，简称为能观测，否则就称系统为不完全能观测的，或简称为系统不能观测。

二、 能控性的定义

1. 状态能控性

考虑n维线性时变系统的状态方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad x(t_0) = x_0 \qquad t \in J$$

如果对取定初始时刻 $t_0 \in J$ 的一个非零初始状态$x(t_0)=x_0$，存在一个时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$ 和一个无约束的容许控制$u(t)$，$t \in [t_0, t_1]$，使状态由$x(t_0)=x_0$转移到t_1时的$x(t_1)=0$，则称此x_0是在时刻t_0能控的.

关于能控性的几点说明

（1）能控性是表征系统状态运动的一个定性特性

（2）无约束的容许控制：“无约束”表示对输入的每个分量的幅值不加以限制；“容许”是指输入的能量是有限的。

（3）能达性：由零初始状态运动到任意指定的非零状态。

连续时间线性定常系统，其能控性与能达性是等价的。

2. 系统完全能控性

n维线性时变系统的状态方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad x(t_0) = x_0 \qquad t \in J$$

如果状态空间中的所有非零状态都是在t_0（$t_0 \in J$）时刻能控的，则称系统在时刻t_0是完全能控的，简称系统在时刻t_0能控。若系统对任意初始时刻$t_0 \in J$都是完全能控的，则称系统是一致完全能控的。

3．系统不完全能控

对于线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad x(t_0) = x_0 \qquad t \in J$$

取定初始时刻 $t_0 \in J$ ，如果状态空间中存在一个或一些非零状态在时刻t_0是不能控的，则称系统在时刻t_0是不完全能控的，也称为系统是不能控的。

三、能观测性定义

1. 系统完全能观测

对于线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \quad t_0, t \in J$$
$$y = C(t)x$$

如果取定初始时刻 $t_0 \in J$，存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$，对于所有 $t \in [t_0, t_1]$，系统的输出$y(t)$能唯一确定状态向量的初值$x(t_0)$，则称系统在$[t_0, t_1]$内是完全能观测的，简称能观测。若系统对任意初始时刻 $t_0 \in J$ 都是完全能观测的，则称系统是一致完全能观测的。

取u=0研究系统的能观性？

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad t \in J$$
$$y = C(t)x + D(t)u, \qquad x(t_0) = x_0$$

状态响应

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

输出响应

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

定义

$$\bar{y}(t) \triangleq y(t) - \left[C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)\right]$$

$$\bar{y}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

令u=0

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

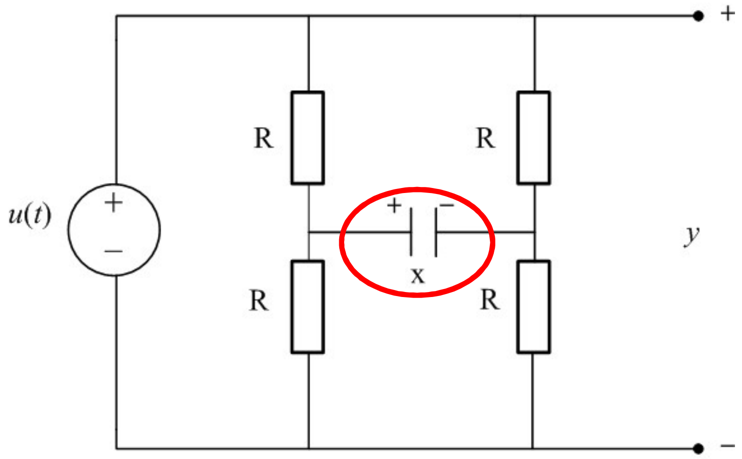
能观测性就是研究x_0可否由$\bar{y}(t)$来完全估计；由于$\bar{y}(t)$和x_0的任意性，这等价于研究u=0时由$y(t)$来估计x_0的可能性。

2．系统不能观测

对于线性时变系统

$$\dot{x}=A(t)x,\qquad x(t_0)=x_0\qquad t_0,t\in J$$
$$y=C(t)x$$

如果取定初始时刻$t_0\in J$，存在一个有限时刻 $t_1\in J,t_1>t_0$，对于所有 $t\in[t_0,t_1]$ ，系统的输出$\boldsymbol{y(t)}$不能唯一确定所有状态的初值$\boldsymbol{x_i(t_0)}$，$\boldsymbol{i=0,1,\ldots,n}$，即至少有一个状态的初值不能被$\boldsymbol{y(t)}$确定，则称系统在$\boldsymbol{[t_0, t_1]}$内是不完全能观测的。



一阶系统，取电容两端电压为状态变量$x(t)$；输入为电压源电压$u(t)$，输出为电压$y(t)$

分析：令$u(t)=0$，不论电容初始电压即初始状态 $x(t_0)$ 是多少，恒有$y(t)=0$，即 $x(t_0)$ 引起的状态运动不能被输出$y(t)$反映，状态$x(t)$是不能观测的。

不能观测：如果存在一个时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$ ，使系统以 $x(t_0)$ 为初始状态的输出恒为零

4. 2 线性连续系统的能控性判据

一、线性定常连续系统的能控性判据

1. 格拉姆矩阵判据

线性定常系统为完全能控的充要条件是，

存在一个有限时刻 t_1，使如下定义的格拉姆矩阵

$$W_c[0,t_1]=\int_0^{t_1} e^{-At}BB^T e^{-A^T t}dt$$

非奇异。

注意：在应用该判据时需计算e^{At}，这在A的维数较高时并非易事，所以此判据主要用于理论分析中。

证明：充分性：$W_c[0,t_1]$ 非奇异 $\Longrightarrow$ 系统完全能控

采用构造法证明，对任一非零初始状态$\boldsymbol{x_0}$构造控制$\boldsymbol{u(t)}$为：

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W_c^{-1}[0,t_1]x_0, \quad t \in [0,t_1]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu(t)dt \\
&= e^{At_1}x_0 - e^{At_1}\int_0^{t_1} e^{-At}BB^T e^{-A^T t}dt\, W_c^{-1}[0,t_1]x_0 \\
&= e^{At_1}x_0 - e^{At_1}W_c[0,t_1]W_c^{-1}[0,t_1]x_0 = e^{At_1}x_0 - e^{At_1}x_0 = 0 \qquad \forall x_0 \in R^n
\end{aligned}$$

这表明：对任一取定的初始状态$\boldsymbol{x_0 \neq 0}$，都存在有限时刻$\boldsymbol{t_1>0}$和控制$\boldsymbol{u(t)}$，使状态由$\boldsymbol{x_0}$转移到$\boldsymbol{t_1}$时刻的状态$\boldsymbol{x(t_1)=0}$，根据定义可知系统为完全能控。

必要性：系统完全能控 $\Longrightarrow$ $W_c[0,t_1]$ 非奇异

反设 $W_c[0,t_1]$ 奇异，即存在某个非零向量 $\bar{x}_0 \in R^n$，使

$$\bar{x}_0^T W_c(0,t_1)\bar{x}_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
0 = \bar{x}_0^T W_c(0,t_1)\bar{x}_0 &= \int_0^{t_1} \bar{x}_0^T e^{-At} BB^T e^{-A^T t} \bar{x}_0 dt \\
&= \int_0^{t_1} \left[B^T e^{-A^T t} \bar{x}_0 \right]^T \left[B^T e^{-A^T t} \bar{x}_0 \right] dt \\
&= \int_0^{t_1} \left\| B^T e^{-A^T t} \bar{x}_0 \right\|^2 dt
\end{aligned}$$

其中||·||为范数，故其必为非负。欲使上式成立，必有

$$B^T e^{-A^T t} \bar{x}_0 = 0, \qquad \forall t \in [0,t_1]$$

因系统完全能控，根据定义对此非零向量 $\bar{x}_0$ 应有

$$\boxed{x(t_1)=e^{At_1}\bar{x}_0+\int_0^{t_1}e^{At_1}e^{-At}Bu(t)dt=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{x}_0=-\int_0^{t_1}e^{-At}Bu(t)dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\|\bar{x}_0\right\|^2=\bar{x}_0^T\bar{x}_0=\left[-\int_0^{t_1}e^{-At}Bu(t)dt\right]^T\bar{x}_0=-\int_0^{t_1}u^T(t)\underbrace{B^Te^{-A^Tt}\bar{x}_0}_{=\mathbf{0}}dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left\|\bar{x}_0\right\|^2=0 \quad \text{即} \quad \bar{x}_0=0}$$

此结果与假设 $\bar{x}_0\neq 0$ 相矛盾，即 $W_c[0,t_1]$ 奇异的反设不成立。

因此，若系统完全能控，$W_c[0,t_1]$ 必为非奇异。

2 秩判据

线性定常系统为完全能控的充要条件是：

$$rankQ_c = rank\boxed{[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]} = n$$

能控判别阵

补充：秩判据

线性定常系统为完全能控的充要条件是：

$$rankQ_{n-r+1} = rank[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-r}B] = n$$

该方法是秩判据的改进，特别适用于多输入系统，可减少不必要的计算。

其中： $r = rankB$， $r \le p$

例：已知

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

判断其能控性。

解：系统阶次 $n=2$，确定出能控判别阵

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -10\end{bmatrix}$$

$rankQ_c=2=n$，所以系统为完全能控。

例：判断下列系统的能控性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解法一：

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

矩阵的第二行与第三行线性相关，故

***rankQ* =2＜3**，系统不能控。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

解法二：

***n*=3, 系统输入向量是2维的列向量，即$p=2$。**

$$\because \quad r=rankB=rank\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=2 \quad \therefore \quad Q=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -2 & -2\end{array}\right]$$

显然矩阵***Q***的第二行与第三行线性相关，

故 $rankQ=2<3$ ，系统不能控。

3．PBH秩判据

线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \ge 0$$

完全能控的充要条件：对矩阵*A*的所有特征值 $\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$ ，

$$\boxed{rank\begin{bmatrix}\lambda_i I - A & B\end{bmatrix} = n \qquad i = 1,2,\cdots,n}$$

均成立，或等价地表示为

$$\boxed{rank\begin{bmatrix}sI - A & B\end{bmatrix} = n, \qquad \forall s \in C}$$

例：已知线性定常系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&5&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\\-2&0\end{bmatrix}u$$

判断系统的能控性。

解：根据状态方程可写出

$$\begin{bmatrix}sI-A & B\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc|cc}s&-1&0&0&0&1\\0&s&1&0&1&0\\0&0&s&-1&0&1\\0&0&-5&s&-2&0\end{array}\right]$$

特征方程： $\det(sI-A)=s^2(s-\sqrt{5})(s+\sqrt{5})=0$

解得A的特征值为： $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\sqrt{5},\lambda_4=-\sqrt{5}$

1） 当 $s=\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}=4$$

2）当$s=\lambda_3=\sqrt{5}$时，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}=4$$

3）当$s=\lambda_3=-\sqrt{5}$时，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}=4$$

所以系统是完全能控的。

4. PBH特征向量判据

线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$

完全能控的充要条件是：***A***不能有与***B***的所有列相正交的非零左特征向量。即对***A***的任一特征值λ_i，使同时满足

左特征向量

$$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \qquad \alpha^T B = \mathbf{0}$$

与**B**的所有列正交

的特征向量 $\alpha \equiv \mathbf{0}$

注：**PHB**特征向量判据主要用于理论分析中，特别是线性系统的复频域分析中。

5．约当规范形判据

（1）无重特征值时能控性判别

当矩阵A的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为两两相异时，线性定常连续系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$

完全能控的充分必要条件是：其对角线规范形

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

中，$\bar{B}$矩阵不包含元素全为零的行。

例：已知线性定常系统的对角线规范形为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

判断系统的能控性。

解：由于此规范形中 $\bar{B}$ 不包含元素全为零的行，故系统完全能控。

例：判断如下系统的能控性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}u$$

解：

$$rankQ_c=rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & -4\end{bmatrix}=2<3$$

系统不完全能控

（2）有重特征值时能控性判别

当系统矩阵A有重特征值时，线性定常连续系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$

完全能控的充分必要条件是：由其导出的约当规范形

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \hat{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{B}\boldsymbol{u}$$

中，$\hat{B}$ *中与同一特征值的各约当小块对应的各子块的最后一行组成的矩阵是行线性无关的。*

例：已知约当规范形如下：

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}u$$

试判断其能控性。

解： $\hat{B}_{\sigma_1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$， $\hat{B}_{\sigma_2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$ ，均行线性无关，

所以：系统完全能控。

例：证明如下系统总是完全可控的。

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{c|ccc}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{array}\right]x+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

证明：

$$Q_c=\left[\begin{array}{c|ccc}0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & ⋰ & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & ⋰ & ⋰ & * \\ 1 & -a_{n-1} & * & *\end{array}\right]$$

$\mathrm{rank}Q_c=n$，故完全可控。

该题说明：能控规范形系统完全能控。

线性定常系统的能控性判据

判据	判定方法	特点
格拉姆矩阵判据	格拉姆矩阵非奇异	1. 证明过程给出了控制输入的构造关系式 2. 计算复杂
秩判据	能控判别阵满秩	1. 计算简便可行 2. 缺点为不知道状态空间中哪些特征值能控
PBH秩判据	对于所有特征值 $rank[\lambda_i I - A, B] = n$	1. 易于分析哪些特征值可控 2. 缺点为需要求系统的特征值
约当规范形判据	约当规范形中同一特征值对应的B矩阵分块的最后一行线性无关	1. 易于分析哪些特征值能控 2. 缺点为需变换成规范形

二 能控性指数

对线性定常系统，$B=[b_1\ b_2\ \cdots\ b_p]$，定义n×kp矩阵：

$$
\begin{aligned}
Q_k &= [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{k-1}B], \quad k=1,2,\cdots \\
&= \left[b_1 \quad \cdots \quad b_p \;\vdots\; Ab_1 \quad \cdots \quad Ab_p \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{k-1}b_1 \quad \cdots \quad A^{k-1}b_p \right]
\end{aligned}
$$

引理：对矩阵 Q_k，若 $A^j b_i (j=0,1,\cdots,k-1; i=1,2,\cdots,p)$ 与其左边各列相关，则所有的列 $A^{j_1} b_i (j_1 > j)$ 均相关于各自左边的列。

能控性指数：矩阵 Q_k 的秩随着k单调增加，直至k= μ 。在k> μ 时，$A^k B$的全部p个列将线性相关于它的左边各列，此时 Q_k 的秩不再增加，即

$$\boxed{\mu\text{=使“}rankQ_k = n\text{”成立的k的最小正整数}}$$

称 μ 为系统的能控性指数。

定理：能控性指数满足

$$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{p}} \le \mu \le \min(\bar{\mathrm{n}}, \mathrm{n} - r + 1)$$

其中，$\bar{n}$为矩阵A的最小多项式次数，

$r = rankB$，n为系统的阶次。

能控性指数集

$$Q_\mu = \left[b_1 \quad \cdots \quad b_p \;\vdots\; Ab_1 \quad \cdots \quad Ab_p \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{\mu-1}b_1 \quad \cdots \quad A^{\mu-1}b_p \right]$$

从左至右依次找到Q_μ的n个线性无关列，并对其重新排序：

$$\underbrace{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1}_{\mu_1}; \quad \cdots\cdots \quad ; \underbrace{b_r, Ab_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r}_{\mu_r}$$

其中 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r=n$

能控性指数 $\mu = \max\left\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\right\}$

完全能控系统的能控性指数集定义为：$\left\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\right\}$

三 线性时变系统的能控性判据

1 格拉姆矩阵判据

线性时变系统在时刻 t_0 为完全能控的充要条件是，存在一个有限时刻 $t_1(t_1 \in J, t_1 > t_0)$，使如下定义的格拉姆矩阵

$$W_c[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt$$

非奇异。

2 秩判据

线性时变系统在时刻 t_0为完全能控的充分条件是，存在一个有限时刻 $t_1(t_1 \in J, t_1 > t_0)$，使下式成立

$$\operatorname{rank}[M_0(t_1) \vdots M_1(t_1) \vdots \cdots \vdots M_{n-1}(t_1)] = n$$

$$\begin{cases} M_0(t) = B(t) \\ M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \dfrac{d}{dt}M_0(t) \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) = -A(t)M_{n-2}(t) + \dfrac{d}{dt}M_{n-2}(t) \end{cases}$$

例：判断下列系统的能控性

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & 1 & 0\\ 0 & 2t & 0\\ 0 & 0 & t^2+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad J=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix},\quad t_0=0.5$$

解：

$$M_0(t)=B(t)=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad M_1(t)=-A(t)M_0(t)+\frac{d}{dt}M_0(t)=\begin{bmatrix}-1\\ -2t\\ -t^2-t\end{bmatrix}$$

$$M_2(t)=-A(t)M_1(t)+\frac{d}{dt}M_1(t)=\begin{bmatrix}-3t\\ -4t^2-2\\ -(t^2+t)^2-2t-1\end{bmatrix}$$

可以找到 $t=1\in(0,2)$

$$rank\begin{bmatrix}M_0(t) & M_1(t) & M_2(t)\end{bmatrix}_{t=1}=rank\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=3$$

系统在时刻 $t_0=0.5$ 完全能控

4.3 线性连续系统的能观测性判据

一．线性定常连续系统的能观测性判据

1. 格拉姆矩阵判据

线性定常系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

完全能观测的充分必要条件是，存在有限时刻$t_1>0$，使如下定义的格拉姆矩阵

$$W_o(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

为非奇异。

注意：在应用该判据时需计算e^{At}，这在A的维数较高时并非易事，所以此判据主要用于理论分析中。

2. 秩判据

线性定常系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

完全能观测的充分必要条件是:

$$rankQ_o = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

能观测性判别阵

或

$$rankQ_o^T = rank[C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T] = n$$

其中：$\boldsymbol{n}$是系统的维数，$\boldsymbol{Q_o}$称为系统的能观测性判别阵。

例：判断下列系统的能观测性：

$$\dot{x} = Ax \qquad y = Cx$$

(1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$　　(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

解：**(1)** $$rankQ_o = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$$

系统不完全能观测。

(2) $$rankQ_o^T = rank\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 = n$$

系统完全能观测。

例：证明如下系统总是完全能观测的。

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hline 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{array}\right]x \qquad y=[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]x$$

证明：

$$Q_o=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & ⋰ & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & ⋰ & ⋰ & * \\ 1 & -a_{n-1} & * & * \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} Q_o=n$$

系统是完全能观测的。

该题说明：能观测规范形系统是完全能观测的。

适用于多输出系统

补充：能观测性秩判据

线性定常连续系统的状态空间描述

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

其中：***x***为***n***维状态向量；***y***为***q***维输出向量；***A***和***C***分别为(***n***×***n***) 和(***q***×***n***)常阵。该线性定常连续系统完全能观测的充要条件是：

$$rank\bar{Q}_{n-m+1} = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-m} \end{bmatrix} = n$$

其中：$m = rankC$， $m \leq q$

例：判断系统的能观测性。

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

解：***n*=2**, 系统输出向量是**2**维的，即$\boldsymbol{q}=\mathbf{2}$。

$$\because \quad m=rankC=rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=2=q$$

$$\therefore \quad \bar{Q}_{n-m+1}=C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

故 $rank\bar{Q}_{n-m+1}=2=n$，系统完全能观测。

3. PBH秩判据

线性定常系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \ge 0$$
$$y = Cx$$

完全能观测的充分必要条件是：对矩阵*A*的所有特征值 $\lambda_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，均有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n; \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

成立。或等价地表示为

$$rank \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in C$$

4. PBH特征向量判据

线性定常系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

完全能观测的充分必要条件是：***A***没有与***C***的所有行相正交的非零右特征向量。即对***A***的任一特征值 $\lambda_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ ，使同时满足

右特征向量

$$A\alpha = \lambda_i \alpha, \qquad C\alpha = \mathbf{0}$$

与C的所有行正交

的特征向量$\alpha \equiv \mathbf{0}$。

注：PHB特征向量判据主要用于理论分析中。

5. 约当规范形判据

（1）无重特征值时能观测性判别

当矩阵*A*的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为两两相异时，线性定常连续系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \ge 0$$
$$y = Cx$$

完全能观测的充分必要条件是：其对角线规范形

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x}, \qquad y = \bar{C}\bar{x}$$

中，$\bar{C}$ 矩阵不包含元素全为零的列。

例：已知线性定常系统的对角线规范形为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{x}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

判断系统的能观测性。

解：由于此规范形中 $\bar{C}$ 不包含元素全为零的列，故系统完全能观测。

（2）有重特征值时能观测性判别

当系统矩阵A有重特征值时，线性定常连续系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

完全能观测的充分必要条件是：由其导出的约当规范形中

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}$$
$$y = \hat{C}\hat{x}$$

$\hat{C}$ 中与同一特征值的各约当小块对应的各子块的第一列组成的矩阵是列线性无关的。

例：约当规范形系统如下：

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}$$

试判断其能观测性。

解：$\hat{C}_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

是列线性无关的；

$$\hat{C}_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

是列线性无关的；

所以：系统完全能观测。

例 已知系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$$

设系统状态完全能控且完全能观，试求a的范围。

解：（1）能控规范形实现为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u;$$

$$y=[\begin{matrix}a & 1 & 0\end{matrix}]x$$

能观测性判别阵：

$$Q_o=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -8 & -14 & a-7 \end{pmatrix}$$

系统完全能观测，必有：

$$\det Q_o=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -8 & -14 & a-7 \end{vmatrix}=a^3-7a^2+14a-8\neq 0;$$

$a_1\neq 1$ 、 $a_2\neq 2$ 和 $a_3\neq 4$ 时，

系统完全能控且完全能观测。

补充：完全能控且完全能观测的子系统组合后不一定保持原有的能控性或能观测性。

例：设完全能控且完全能观测的子系统为

$$S_1\text{:}\quad \dot{x}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_1,\quad y_1=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x_1$$

$$S_2\text{:}\quad \dot{x}_2=-x_2+u_2,\quad y_2=x_2$$

求出并联组合系统的状态空间描述，并判断并联组合系统的能控性和能观测性。

解：（1）子系统并联组合后的系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u \Rightarrow \dot{x}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\ 1\\ \hline 1\end{array}\right]u$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_1+D_2\end{bmatrix}u \Rightarrow y=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

（2）能控性判别矩阵：

$$Q_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\because \det Q_c=0 \qquad \therefore \mathrm{rank}Q_c<n$$

（3）能观性判别矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because \det Q_o = 0 \qquad \therefore \operatorname{rank} Q_o < n$$

该并联组合系统不完全能控且不完全能观测。

二、能观测性指数

对线性定常系统

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

设k为正整数，定义如下$(kq \times n)$矩阵：

$$\bar{Q}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

当系统完全能观测时，在 $\bar{Q}_n$中的nq个行中，有n个线性无关的行。从 $\bar{Q}_n$中依次从上向下挑选线性无关行。

类似能控性指数的讨论可得到如下结论：

矩阵$\bar{Q}_k$的秩随着k的增加而单调增加，直至增至某个$k=v$时$rank\ \bar{Q}_v=n$。在$k>v$时，CA^{k-1}的全部q个行将线性相关于它的上边各行，此时$\bar{Q}_k$的秩不再增加，而v就被称为系统的能观测性指数。

1. 能观测性指数的定义：对完全能观测连续时间线性时不变系统，定义系统的能观测性指数为：

$$\boxed{v=\text{使“}rank\bar{Q}_k=n\text{”成立的}k\text{的最小正整数}}$$

2. 结论1：对完全能观测单输出连续时间线性时不变系统,状态维数为n,则系统能观测性指数为$v=n$ 。

3. 结论2：对完全能观测多输出连续时间线性时不变系统，状态维数为n，输出维数为q，设$rankC=m$，则系统能观测性指数满足如下估计

$$\boxed{\frac{n}{q} \le v \le n-m+1}$$

并可进一步证明，若$\bar{n}$为矩阵A的最小多项式的次数，则系统能观测性指数还满足如下估计

$$\boxed{\frac{n}{q} \le v \le \min(\bar{n}, n-m+1)}$$

4. 能观测性指数集的定义：对完全能观测多输出连续时间线性时不变系统，状态维数为n，输出维数为q，设$rankC=m$，将$\bar{Q}_v$表为：

$$\bar{Q}_v = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ \hdashline c_1 A \\ \vdots \\ c_q A \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline c_1 A^{v-1} \\ \vdots \\ c_q A^{v-1} \end{bmatrix}$$

并从上至下依次搜索$\overline{Q}_v$的n个线性无关行，考虑到C中有且仅有m个线性无关行，故可将n个线性无关行重新排列为：

$$\begin{array}{r}
\nu_1\left\{\begin{array}{l} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{\nu_1-1} \end{array}\right. \\
\nu_2\left\{\begin{array}{l} c_2 \\ c_2A \\ \vdots \\ c_2A^{\nu_2-1} \end{array}\right. \\
\vdots \qquad \vdots \quad \\
\nu_m\left\{\begin{array}{l} c_m \\ c_mA \\ \vdots \\ c_mA^{\nu_m-1} \end{array}\right.
\end{array}$$

对能观测系统显然有

$$\boxed{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n}$$

能观测性指数ν满足关系式

$$\boxed{\nu=\max\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m\}}$$

称数集 $\boxed{\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m\}}$ 为系统的能观测性指数集。

5. 结论3： 线性定常系统的能观测性指数在状态的非奇异变换下保持不变。

三、线性时变连续系统的能观测性判据

1. 格拉姆矩阵判据

对连续时间线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t, t_0 \in J$$
$$y = C(t)x$$

在时刻 $t_0 \in J$ 为完全能观测的充要条件是，存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$ ，使如下定义的格拉姆矩阵

$$W_o[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

非奇异。

2. 秩判据

设$A(t)$和$C(t)$是n-1阶连续可微的，则线性时变系统在时刻$t_0 \in J$为完全能观测的一个充分条件是，存在一个有限时刻 $t_1 \in J, t_1 > t_0$，使下式成立

$$rank\begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

其中：

$$N_0(t) = C(t)$$

$$N_1(t) = N_0(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_0(t)$$

$$N_2(t) = N_1(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_1(t)$$

$$\cdots$$

$$N_{n-1}(t) = N_{n-2}(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_{n-2}(t)$$

例：判断下列系统的能观测性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t^2+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$J = [0 \quad 2], \quad t_0 = 0.5$$

解：

$$N_0(t) = C(t) = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$N_1(t) = N_0(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_0(t) = \begin{bmatrix} t & 2t+1 & t^2+t \end{bmatrix}$$

$$N_2(t) = N_1(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_1(t) = \begin{bmatrix} t^2+1 & 4t^2+3t+2 & (t^2+t)^2+(2t+1) \end{bmatrix}$$

可以找到 $t = 2 \in [0,2]$

$$rank\begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix}_{t=2} = rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 5 & 24 & 41 \end{bmatrix} = 3$$

系统在时刻 $t_0 = 0.5$ 完全能观测

4.4 对偶性

- 从前面的讨论中可以看出，系统状态能控性和能观性，无论是从定义或判据方面来看，在形式和结构上都极为相似。这种相似关系可以总结成下表：

	能控性	能观性
意义	输入 $\xrightarrow{\text{控制}}$ 状态	状态 $\xleftarrow{\text{估计}}$ 输出
秩判据	rank$[B\ \ AB\ \dots\ A^{n-1}B]=n$	rank$[C\ \ CA\ \dots\ CA^{n-1}]^{T}=n$
约当规范形判据	同一特征值的约当小块对应**B**的分块的最后一行是否相关	同一特征值的约当小块对应**C**的分块的第一列是否相关
PBH秩判据	rank$[\lambda I-A\ \ \ B]=n\ \ \forall\lambda$	rank$[\lambda I-A^{\tau}\ \ C^{\tau}]=n\ \forall\lambda$

一 对偶系统

考虑线性时变系统

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{aligned} \qquad (1)$$

线性时变系统的对偶系统的状态空间描述为:

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} \dot{\psi}^T &= -A^T(t)\psi^T + C^T(t)\eta^T \\ \varphi^T &= B^T(t)\psi^T \end{aligned} \qquad (2)$$

式中: ψ-n维行向量, 协态; φ-输出, p维行向量;

η-输入, q维行向量。

显然,若系统Σ(***A***,***B***,***C***)是一个***p***维输入,***q***维输出的***n***阶系统,则其对偶系统是一个***q***维输入,***p***维输出的***n***阶系统。

说明1：$\sum$和$\sum_d$的系数矩阵之间的对应关系：

$\sum_d$系统矩阵= - $\sum$系统矩阵的转置

$\sum_d$输入矩阵=$\sum$输出矩阵的转置

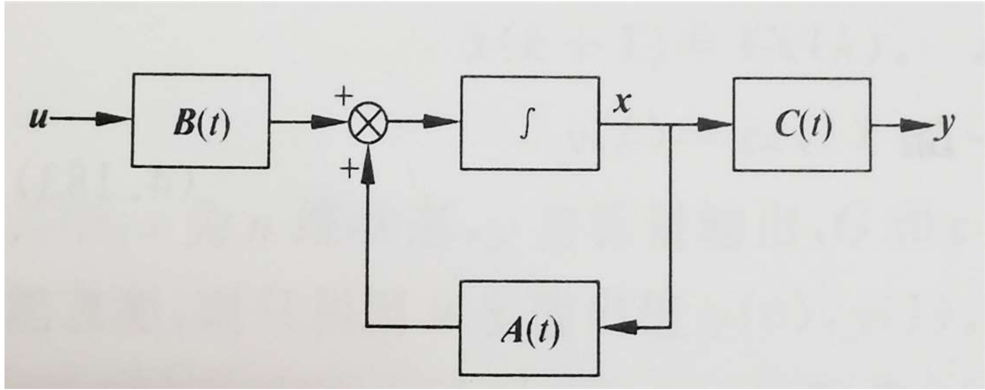
$\sum_d$输出矩阵=$\sum$输入矩阵的转置

说明2：状态转移矩阵的对偶性：

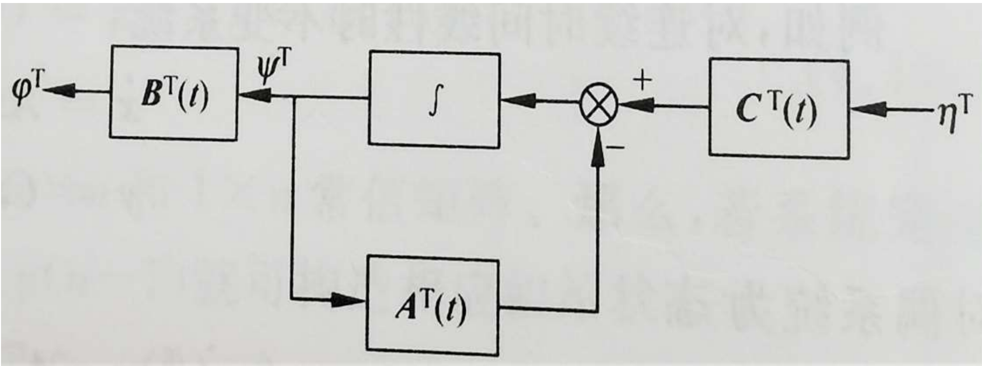
$\Phi(t,t_0)$ 为系统$\sum$的状态转移矩阵，$\Phi_d(t,t_0)$为系统$\sum_d$的状态转移矩阵，二者之间具有如下对偶属性：

$$\boxed{\Phi_d(t,t_0)=\Phi(t,t_0)\text{逆的转置}=\left[\Phi^{-1}(t,t_0)\right]^T=\Phi^T(t_0,t)}$$

说明3：$\sum$和$\sum_d$的方块图对偶属性



系统$\sum$



系统$\sum_d$

两系统互为对偶意味着：

（1）输入端与输出端互换；

（2）信号流向相反；

（3）信号引出点和求和点位置互换。

二、对偶原理

线性时变系统的完全能控等同于其对偶系统的完全能观测，线性时变系统的完全能观测等同于其对偶系统的完全能控，即

$$\sum \text{完全能控} \Leftrightarrow \sum_d \text{完全能观测}$$

$$\sum \text{完全能观测} \Leftrightarrow \sum_d \text{完全能控}$$

证明： $\sum$完全能控 $\longleftrightarrow$ $\sum_d$完全能观测

$\sum$在t_0时刻为完全能控

$\Downarrow$ 存在有限时刻$t_1 > t_0$

$$n = rank\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0,t)dt\right]$$

原系统能控性判别的格兰姆矩阵

$$= rank\left[\int_{t_0}^{t_1} \left[\Phi^T(t_0,t)\right]^T \left[B^T(t)\right]^T \left[B^T(t)\right]\left[\Phi^T(t_0,t)\right]dt\right]$$

$$= rank\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi_d^T(t,t_0)\left[B^T(t)\right]^T\left[B^T(t)\right]\Phi_d(t,t_0)dt\right]$$

对偶系统能观性判别的格兰姆矩阵

这表明它等同于$\sum_d$在时刻t_0为状态完全能观测。

同理可证： $\sum$完全能观测 $\longleftrightarrow$ $\sum_d$完全能控

4.5 能控规范形和能观测规范形

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

能控规范形

能观测规范形

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}$$

单输入单输出系统

外部描述
（微分方程或传递函数）

内部描述
(状态空间描述)

状态实现

线性非奇异变换

能控规范形和能观测规范形

一 单变量系统的能控能观规范形

1 非奇异线性变换的不变特性

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$$

$$\bar{x} = Px$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \qquad y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u$$

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}, \bar{D} = D$$

系统经过非奇异线性变换后，不会改变系统原有特性(包括系统特征值、传递函数矩阵、能控性、能观性、能控性指数和能观性指数等)。

2 能控规范形

能控规范形的构造条件：系统完全能控

对于一个单输入单输出的n维完全能控系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$\xrightarrow{\bar{x} = Px}$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

如何构造非奇异变换矩阵？

系统的特征多项式为 $\alpha(s)=\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$

构造非奇异线性变换阵$\boldsymbol{P}^{-1}$： $\bar{x}=Px$

$$P^{-1}=Q_c\Lambda=\underbrace{\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}}_{Q_c}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \iddots & \iddots & 1 & \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

或者

$$P^{-1}=[\mathrm{A}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{b}\cdots\mathrm{Ab}\ \ \mathrm{b}]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{\mathrm{n-1}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{\mathrm{n-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

作变换 $x = P^{-1}\bar{x}$，即可导出能控规范形为：

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$$

$$y = \bar{c}\,\bar{x}$$

式中：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = cP^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \qquad \vdots \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb \end{cases}$$

例：将如下系统转换为能控规范形

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[0\quad 1\quad 1]x$$

解：

$$Q_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&5&10\\1&-1&5\end{bmatrix}$$

系统完全能控

$$\begin{cases}\beta_2=cb=3\\ \beta_1=cAb+\alpha_2cb=4\\ \beta_0=cA^2b+\alpha_2cAb+\alpha_1cb=0\end{cases}$$

$$\alpha(s)=\det(sI-A)=s^3-5s+4$$

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&5&0\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[0\quad 4\quad 3]\bar{x}$$

或者：

$$P^{-1} = Q_c \Lambda = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{28} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

能控规范形为 $\quad \bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

3 能观测规范形

能观测规范形的构造条件：系统完全能观测

对于一个单输入单输出的n维完全能观测系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$\hat{x} = Px$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \hat{x}$$

$$\hat{A} = PAP^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = CP^{-1}, \quad \hat{D} = D$$

如何构造非奇异变换矩阵？

系统的特征多项式为 $\alpha(s)=\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$

构造非奇异线性变换阵***P***： $\hat{x} = Px$

$$P=\Lambda Q_o=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1\\ \alpha_2 & ⋰ & ⋰ & 1 & \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}A\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}A^{n-2}\\ \boldsymbol{c}A^{n-1}\end{bmatrix}}_{Q_o}$$

或者

$$P=\begin{bmatrix}1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \alpha_{n-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}A^{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}A\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$$

作变换 $x = P^{-1}\hat{x}$，即可导出能观规范形为：

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{b}u$$

$$y = \hat{c}\hat{x}$$

式中：

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}; \qquad \hat{b} = Pb = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{c} = cP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \qquad\qquad \vdots \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb \end{cases}$$

例：将如下系统转换为能观测规范形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 1]x$$

解：

$$Q_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

系统完全能观测

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4$$

$$\begin{cases} \beta_2 = cb = 3 \\ \beta_1 = cAb + \alpha_2 cb = 4 \\ \beta_0 = cA^2 b + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]\bar{x}$$

或者：

$$P = \Lambda Q_o = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

能观测规范形为 $\hat{A} = PAP^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = CP^{-1}, \quad \hat{D} = D$

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{x}$$

二 多变量系统的能控规范形和能观规范形

1 搜索线性无关行或列的方案

考虑n维多输入-多输出线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx$$

其能控判别阵能观判别阵分别为:

$$Q_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$

寻找线性无关的列

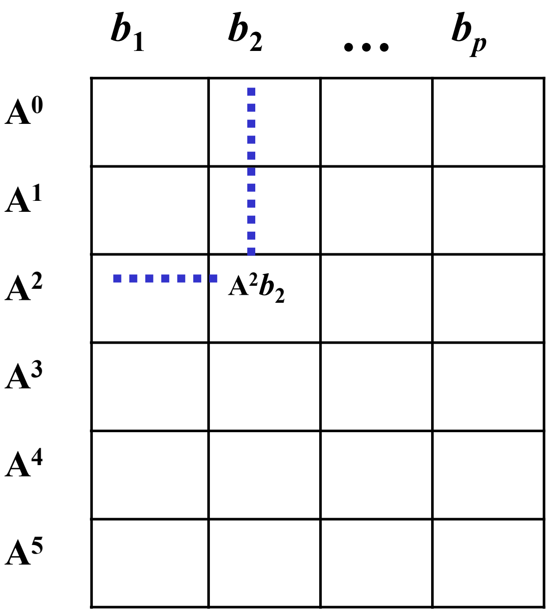
$$Q_o = [C \vdots CA \vdots \cdots \vdots CA^{n-1}]^T$$

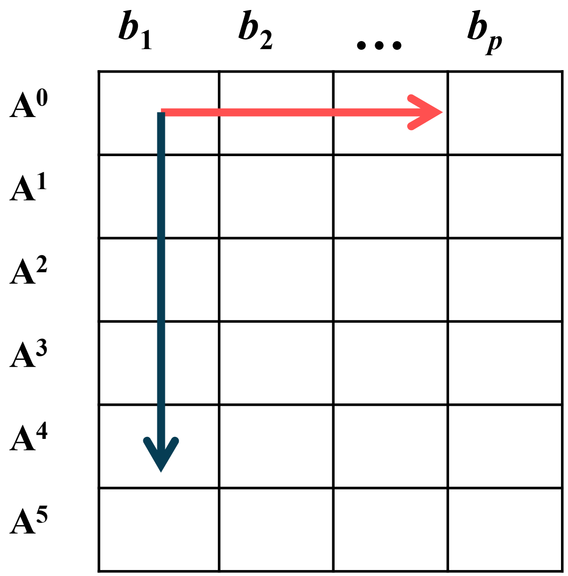
寻找线性无关的行

搜索Q_c中n个线性无关列向量

$$Q_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r & \cdots & b_p \end{bmatrix}}$$





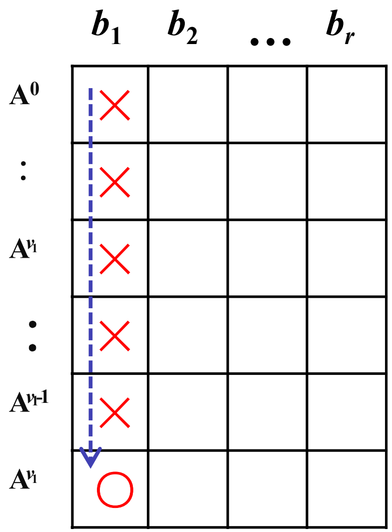
按照搜索方向的不同，可分为：

- 列向搜索
- 行向搜索

（1） 列向搜索方案

搜索步骤：

第1步：对栅格图的左第1列，若 b_1 非零，在乘积 A^0b_1 格内划×。转入下一格，若 Ab_1 和 b_1 线性无关，则在其格内划×。如此等等，直到首次出现 $A^{\nu_1}b_1$ 和 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\nu_1-1}b_1\}$ 线性相关，在其格内划○，并停止第1列的搜索，得到一组线性无关的列向量为：



$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{\nu_1-1}b_1$$ **长度为 ν_1**

第2步：向右转入第2列，若 b_2 和 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\nu_1-1}b_1\}$ 线性无关，则在其格内划×。

转入下一格，若 Ab_2 和 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\nu_1-1}b_1; b_2\}$ 线性无关，则在其格内划×。如此等等，直到首次出现 $A^{\nu_2}b_2$ 和 $\{b_1, Ab_1, \cdots, A^{\nu_1-1}b_1; b_2, Ab_2, \cdots, A^{\nu_2-1}b_2\}$ 线性相关，在其格内划○，并停止第2列的搜索，得到一组线性无关的列向量为:

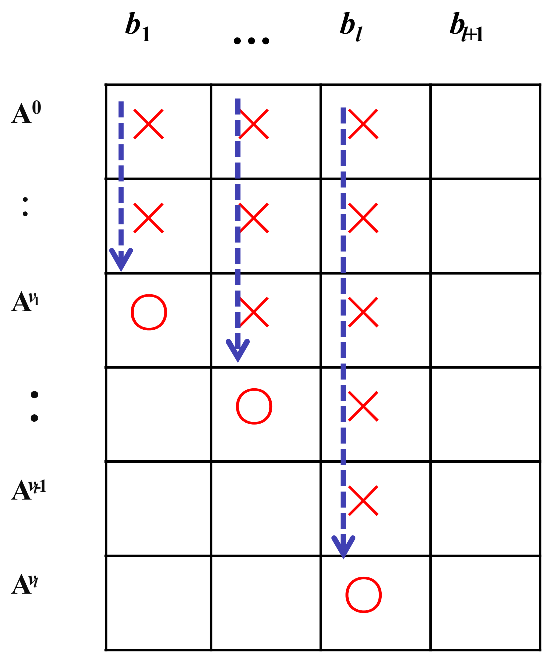
$$b_2, Ab_2, \cdots, A^{\nu_2-1}b_2$$ **长度为ν_2**

	b_1	b_2	…	b_r
A^0	×	×		
⋮	×	×		
A^{ν_1}	○	×		
⋮		×		
A^{ν_2-1}		×		
A^{ν_2}		○		

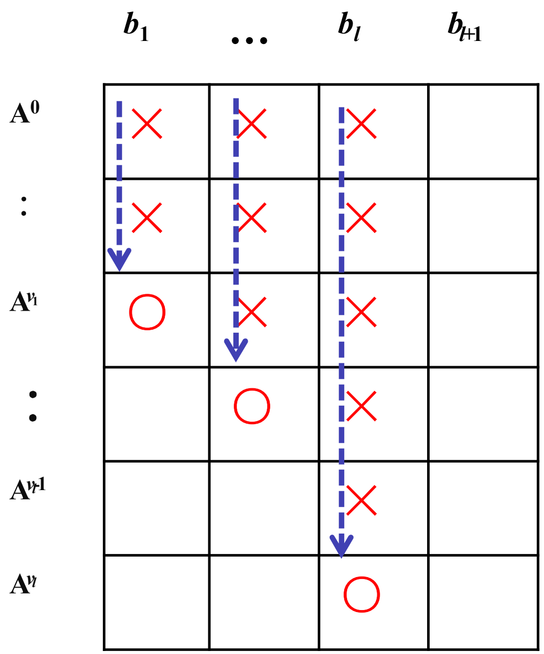
第l步：向右转入第l列，若 b_l 和 $\{b_1,\cdots,A^{\nu_1-1}b_1;b_2,\cdots,A^{\nu_2-1}b_2;\cdots;b_{l-1},\cdots,A^{\nu_{l-1}-1}b_{l-1}\}$线性无关，则在其格内划×。如此等等，直到首次出现 $A^{\nu_l}b_l$ 和 $\{b_1,\cdots,A^{\nu_1-1}b_1;b_2,\cdots,A^{\nu_2-1}b_2;\cdots;b_l,\cdots,A^{\nu_l-1}b_l\}$ 线性相关，在其格内划○，并停止第l列的搜索，得到一组线性无关的列向量为：

$$b_l,Ab_l,\cdots,A^{\nu_l-1}b_l$$

长度为 ν_l



第l+1步：若 $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_l=\mathrm{n}$ 停止计算。并且，上述l组列向量即为按列向搜索方案找到的 Q_c 中n个线性无关列向量。



（2）行向搜索方案

搜索步骤：

第1步：$\operatorname{rank}B = r \le p$，即B中有r个列是线性无关量。对栅格图的第1行，若 b_1 非零，在 $A^0 b_1$ 格内划×。由左至右找出r个线性无关向量：

$$b_1, b_2, \cdots, b_r$$

并在对应格内划×。

	b_1	b_2	…	b_r
A^0	×	×	×	×
A^1				
:				
:				
A^{μ}				
$A^{\mu+1}$				

第2步：转入第2行，从 Ab_1 格到 Ab_r 由左至右进行搜索。若线性相关则在其格内划○，否则划×。

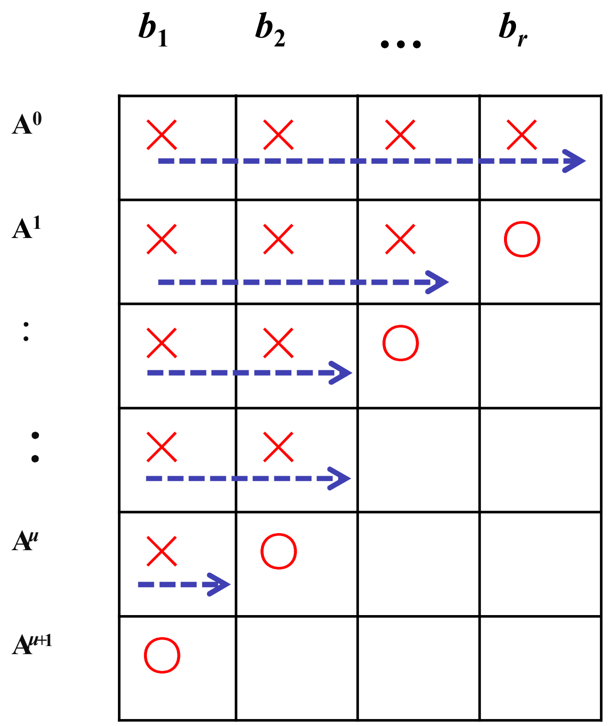
……

第l步：转入第l行，从 $A^l b_1$ 格到 $A^l b_r$ 由左至右进行搜索。若线性相关则在其格内划○，否则划×。

	b_1	b_2	…	b_r
A^0	×	×	×	×
A^1	×	×	×	○
:				
:				
A^μ				
$A^{\mu+1}$				

	b_1	b_2	…	b_r
A^0	×	×	×	×
A^1	×	×	×	○
:	×	×	○	
:	×	×		
A^μ	×	○		
$A^{\mu+1}$				

第 l+1步：若至此找到n个线性无关列向量，则结束搜索。栅格图中划×格对应的列向量组就是按行向搜索方案找到的 Q_c 中n个线性无关列向量。



2 龙伯格能控规范形

结论：对完全能控的多输入-多输出线性定常系统，引入非奇异变换 $\bar{x} = S^{-1}x$ ，可导出其龙伯格能控规范形为：

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \xrightarrow[\text{非奇异线性变换}]{\bar{x} = S^{-1}x} \qquad \dot{\bar{x}} = \bar{A}_c\bar{x} + \bar{B}_c u$$

$$y = Cx \qquad\qquad\qquad\qquad y = \bar{C}_c\bar{x}$$

$$\bar{A}_c = S^{-1}AS,$$

$$\bar{B}_c = S^{-1}B,$$

$$\bar{C}_c = CS$$

能控性指数集： $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots & \bar{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{A}_{r1} & \cdots & \bar{A}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\mu_i \times \mu_i)}{\bar{A}_{ii}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}, i = 1, \cdots, r$$

$$\underset{\mu_i \times \mu_j}{\bar{A}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}, i \neq j$$

能控性指数集：$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$

$$
\underset{(n\times p)}{\bar{B}_c} = S^{-1}B =
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c|c|c|ccc}
0 & & & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & \\
0 & & & & & \\
1 & * & & \vdots & & \vdots \\
\hline
 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
 & & 0 & \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots & & & \\
 & & 0 & & & \\
 & & 1 & * & \cdots & *
\end{array}\right]
\\
\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{p-r} \end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} \mu_1 \\
\vphantom{0} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} \mu_r
\end{array}
$$

$\bar{\mathrm{C}}_c = \mathrm{CS}$(无特殊形式)

如何构造龙伯格能控规范形？

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

$\bar{x} = S^{-1}x$ 非奇异线性变换 $\rightarrow$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_c\bar{x} + \bar{B}_c u \qquad y = \bar{C}_c\bar{x}$$

（1）得到 Q_c 中n个线性无关的列向量（行向量搜索）；

$$P^{-1} = [b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1 - 1}b_1; b_2, \cdots, A^{\mu_2 - 1}b_2; \cdots; b_r, \cdots, A^{\mu_r - 1}b_r]$$

其中

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$$

$$\text{rank}B = r$$

（2）求P^{-1}得到矩阵P,然后对P按照能控性指数集进行分块。

$$P=(P^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix} e_{11}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline e_{r1}^T \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T \end{bmatrix}$$

（3）取P的每个块阵中的末行构成变换阵S^{-1}：

$$S^{-1}=\begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} e_{1\mu_1}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T A^{\mu_1-1} \end{matrix}\right\} \mu_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \left.\begin{matrix} e_{r\mu_r}^T \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T A^{\mu_r-1} \end{matrix}\right\} \mu_r \end{bmatrix}$$

4.6 连续时间线性时不变系统的结构分解

什么是结构分解？

$$x \xrightarrow{\text{按能控性}} \begin{cases} x_c \rightarrow \text{能控子系统} \\ x_{\bar{c}} \rightarrow \text{不能控子系统} \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{\text{按能观测性}} \begin{cases} x_o \rightarrow \text{能观测子系统} \\ x_{\bar{o}} \rightarrow \text{不能观测子系统} \end{cases}$$

x —按能控性→ x_c, $x_{\bar{c}}$

x_c —按能观测性→ x_{co}, $x_{c\bar{o}}$

$x_{\bar{c}}$ —按能观测性→ $x_{\bar{c}o}$, $x_{\bar{c}\bar{o}}$

x_{co} → **能控能观测子系统**

$x_{c\bar{o}}$ → **能控不能观测子系统**

$x_{\bar{c}o}$ → **不能控能观测子系统**

$x_{\bar{c}\bar{o}}$ → **不能控不能观测子系统**

如何实现结构分解？

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

线性非奇异变换

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$
$$y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u$$

x —线性非奇异变换→ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$

一、线性定常系统按能控性的结构分解

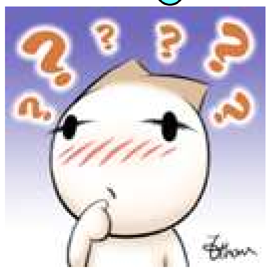
结论：对不完全能控的系统，$rankQ_c=k<n$，引入线性非奇异变换 $\bar{x}=Px$，系统按能控性结构分解的规范表达式为：

*k*维能控分状态

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_c\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\end{cases}$$

*n-k*维不能控分状态

P 矩阵如何确定？



➢ $n \times n$ 非奇异变换矩阵 P^{-1} 的构造方法：

1）从能控判别阵 Q_c 中任意的选取 k 个线性无关的列向量，记为 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 。

2）在 n 维实数空间中任意选取尽可能简单的 $(n-k)$ 个列向量记为 $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n$ ，使它们和 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 线性无关。

这样就可以构成 $n \times n$ 非奇异变换矩阵

$$P^{-1} = Q = \left[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k \;\vdots\; q_{k+1} \quad \cdots \quad q_n \right]$$

进行线性非奇异变换：$\begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \hline \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \bar{x} = Px$

则系统按能控性分解的规范表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \hline \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \hline 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \hline \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \hline 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \hline \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

k维

$n\text{-}k$维

其中：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \hline 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{array}\right] & \begin{array}{l} k\text{行} \\ (n-k)\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{cc} k\text{列} & (n-k)\text{列} \end{array} & \end{array}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \hline 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} k\text{行} \\ (n-k)\text{行} \end{array} \\ p\text{列} & \end{array}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{array}\right] & q\text{行} \\ \begin{array}{cc} k\text{列} & (n-k)\text{列} \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_c \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_c \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_c \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{A}_{12} \bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_c u \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} &= \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \\ y &= \bar{C}_c \bar{x}_c + \bar{C}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \end{aligned}$$

令 $y = y_c + y_{\bar{c}}$ ，则可定义：

能控子系统：

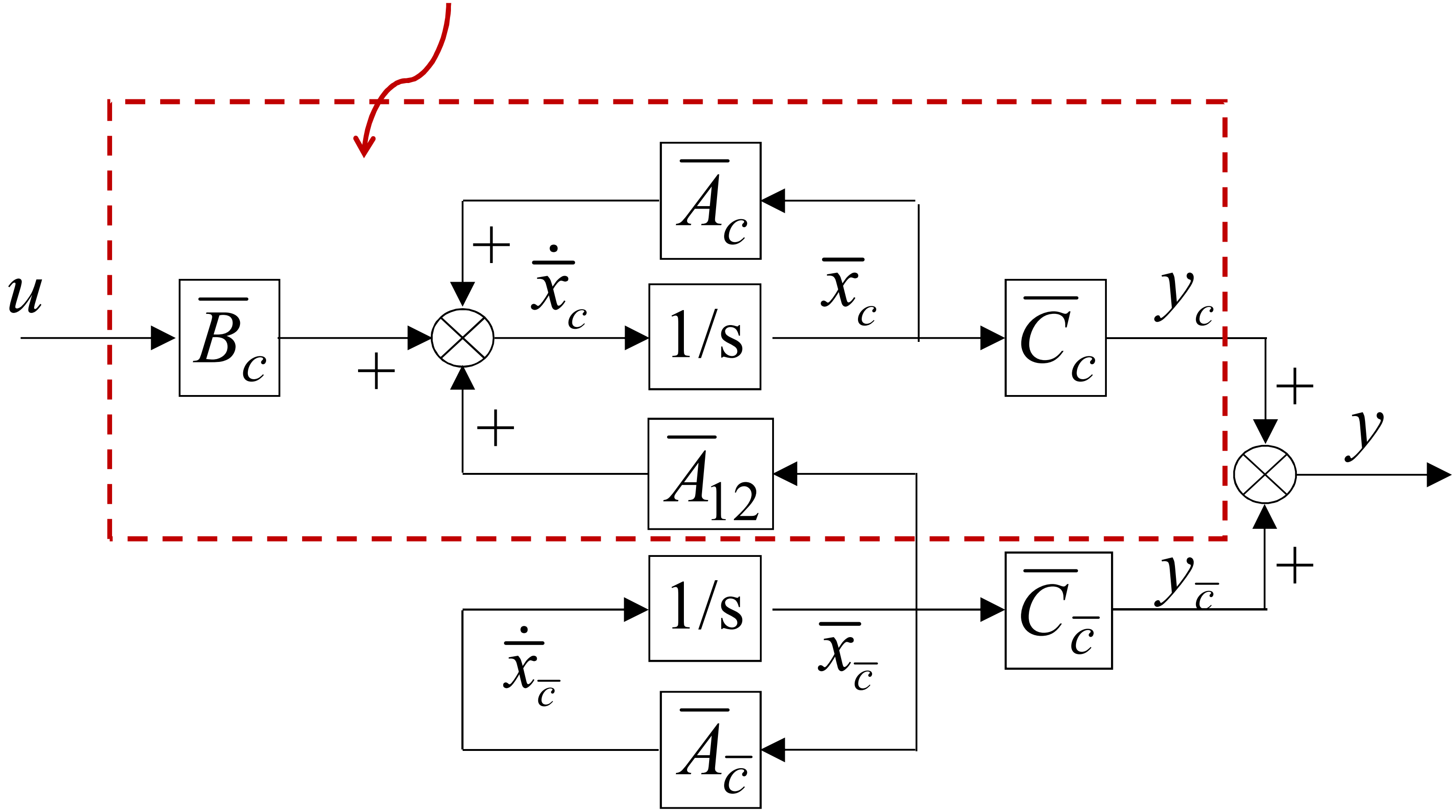
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{A}_{12} \bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_c u \\ y_c &= \bar{C}_c \bar{x}_c \end{aligned}}$$

不能控子系统：

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} &= \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} &= \bar{C}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \end{aligned}}$$

$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{A}_{12} \bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_c u$$
$$y_c = \bar{C}_c \bar{x}_c$$

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{c}} = \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}}$$
$$y_{\bar{c}} = \bar{C}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}}$$



能控性规范分解方框图

➢系统结构能控性分解特点

1）n维不完全能控系统与其能控子系统具有相同的传递函数矩阵

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}$$

$$=\left[\bar{C}_c \;\vdots\; \bar{C}_{\bar{c}}\right]\left[sI-\left[\begin{array}{c:c}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ \hdashline 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{array}\right]\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\bar{B}_c\\ \hdashline 0\end{array}\right]$$

$$=\left[\bar{C}_c \;\vdots\; \bar{C}_{\bar{c}}\right]\left[\begin{array}{c:c}sI_k-\bar{A}_c & -\bar{A}_{12}\\ \hdashline 0 & sI_{n-k}-\bar{A}_{\bar{c}}\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\bar{B}_c\\ \hdashline 0\end{array}\right]$$

$$=\left[\bar{C}_c \;\vdots\; \bar{C}_{\bar{c}}\right]\left[\begin{array}{c:c}(sI_k-\bar{A}_c)^{-1} & (sI_k-\bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(sI_{n-k}-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1}\\ \hdashline 0 & (sI_{n-k}-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\bar{B}_c\\ \hdashline 0\end{array}\right]$$

$$=\left[\bar{C}_c \;\vdots\; \bar{C}_{\bar{c}}\right]\left[\begin{array}{c}(sI_k-\bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c\\ \hdashline 0\end{array}\right]=\bar{C}_c(sI_k-\bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c$$

2）输入u只能通过能控子系统传递到输出，而与不能控子系统无关，故u至y之间的传递函数矩阵描述不能反映不能控部分的特性。

3）由于在选取非奇异变换矩阵时

$$P^{-1}=[q_1 \quad \cdots \quad q_k \mid q_{k+1} \quad \cdots \quad q_n]$$

列向量 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 和 $q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_n$ 的选取不具有唯一性，虽然能控性规范分解的形式不变，但各系数矩阵因P^{-1}的差异而不同，即能控性规范分解结果不唯一。

4）系统的特征多项式可分解为：

$$
\begin{aligned}
\det(sI - A) &= \det(sI - \bar{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\
&= \det(sI - \bar{A}_c) \cdot \det(sI - \bar{A}_{\bar{c}})
\end{aligned}
$$

能控振型

不能控振型

表明不完全能控系统的特征值由两部分组成：一部分为$\bar{A}_c$的特征值，称为系统的能控振型；另一部分为$\bar{A}_{\bar{c}}$的特征值，称为系统的不能控振型。外部输入$\boldsymbol{u}$的引入只能改变能控振型的位置，而不能改变不能控振型的位置。

例： 已知系统（$\boldsymbol{A,b,c}$），其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

试将系统作能控性规范分解。

解：**1**）能控判别矩阵

$$Q_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}\qquad \mathrm{rank}Q_c=2<3;$$

故系统不完全能控。

2）从 Q_c中选出两个线性无关的列向量$[0 \quad 0 \quad 1]^T$和 $[-1 \quad 0 \quad 3]^T$，附加任意列向量 $[0 \quad 1 \quad 0]^T$，构成非奇异变换矩阵$\boldsymbol{P^{-1}}$：

$$P^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow P=\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

则：

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad \bar{\boldsymbol{b}}=P\boldsymbol{b}=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right],\quad \bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}P^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

系统按能控性分解的规范表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \hline \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \hline \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \hline \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

能控子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{x}_c$$

不能控子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{c}} = \bar{x}_{\bar{c}}$$

$$y_{\bar{c}} = -\bar{x}_{\bar{c}}$$

例：给定线性定常系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

试对系统作能控性规范分解。

解：已知 $n=3, p=2$，由于 $r=rankB=2=p$，故只需判断$Q_{n-r+1}=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}$是否为行满秩。

$$rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=rank\left[\begin{array}{cc:cc}0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right]=2<n=3$$

系统不完全能控。

从能控性判别阵中取线性无关的向量q_1, q_2，再任取q_3，构成非奇异线性变换矩阵：

$$P^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\end{array}\right] \qquad \Rightarrow P=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & -1\end{array}\right]$$

则：

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\overline{B}=PB=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\overline{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 2 & 1\end{array}\right]$$

能控子系统的动态方程为：

$$\dot{\overline{x}}_c=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\overline{x}_c+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\overline{x}_{\overline{c}}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}u，\quad y_c=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\overline{x}_c$$

不能控子系统的动态方程为：

$$\dot{\overline{x}}_{\overline{c}}=0，\qquad y_{\overline{c}}=\overline{x}_{\overline{c}}$$

二、线性定常系统按能观测性的结构分解

结论：对不完全能观的系统，$rankQ_o=m<n$，引入线性非奇异变换 $\bar{x}=Px$，系统按能观性结构分解的规范表达式

m维能观测分状态

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_o\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_o & 0\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_o\\ \bar{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_o\\ \bar{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}\bar{C}_o & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_o\\ \bar{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}$$

n-m维不能观测分状态

P矩阵如何确定?

非奇异变换矩阵P的构造方法

1. 从Q_o中任意的选取m个线性无关的行向量，记为 $h_1, h_2, \cdots, h_m$ 。

2. 在n维实数空间中任意选取尽可能简单的$(n-m)$个n维行向量$h_{m+1}, h_{m+2}, \cdots, h_n$，使它们和 $h_1, h_2, \cdots, h_m$ 线性无关。构成$n \times n$非奇异变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \\ \hline h_{m+1} \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

进行非奇异线性变换 $\begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \bar{x} = Px$

即系统按能观测性分解的规范表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \hline \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_o & \mathbf{0} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \hline \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u, \qquad y = \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_o & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} m\text{维} \\ n\text{-}m\text{维} \end{array}$$

其中：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_o & \mathbf{0} \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{array}\right] & \begin{array}{l} m\text{行} \\ (n-m)\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{cc} m\text{列} & (n-m)\text{列} \end{array} & \end{array}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \hline \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} m\text{行} \\ (n-m)\text{行} \end{array} \\ p\text{列} & \end{array}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_o & \mathbf{0} \end{array}\right] & q\text{行} \\ \begin{array}{cc} m\text{列} & (n-m)\text{列} \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \hdashline \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & \mathbf{0} \\ \hdashline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hdashline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \hdashline \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hdashline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o \boldsymbol{u} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} &= \bar{A}_{21} \bar{x}_o + \bar{A}_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}} + \bar{B}_{\bar{o}} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \bar{C}_o \bar{x}_o \end{aligned}$$

能观测子系统：

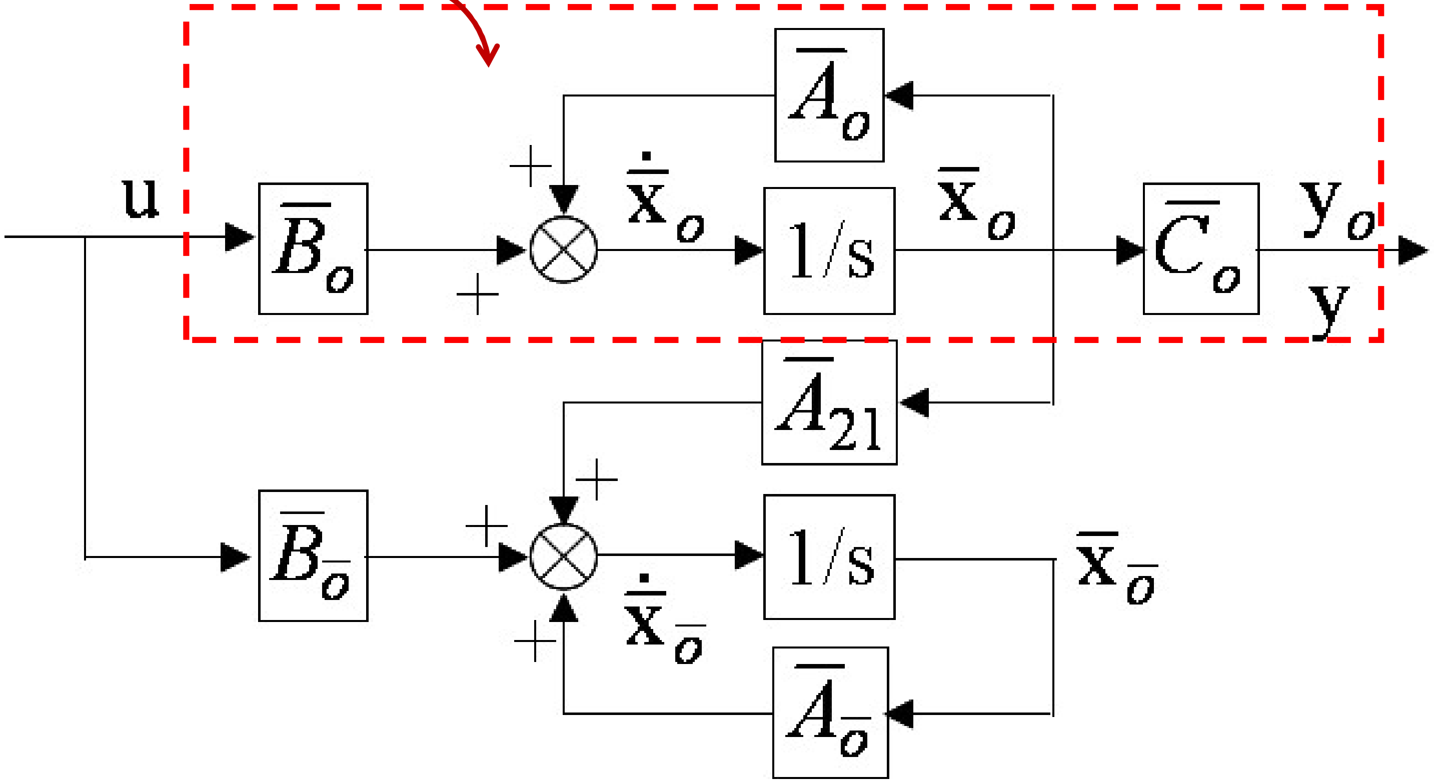
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_o &= \bar{C}_o \bar{x}_o \end{aligned}$$

不能观测子系统：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} &= \bar{A}_{21} \bar{x}_o + \bar{A}_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}} + \bar{B}_{\bar{o}} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_{\bar{o}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{x}}_o = \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u$$
$$y_o = \bar{C}_o \bar{x}_o$$

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{o}} = \bar{A}_{21} \bar{x}_o + \bar{A}_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}} + \bar{B}_{\bar{o}} u$$
$$y_{\bar{o}} = 0$$



能观测性规范分解方块图

例： 试将如下系统按能观测性进行分解。已知系统(***A***,***B***,***C***)，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

解：***n*=3**，系统的能观测性判别矩阵为：

$$Q_o=\begin{bmatrix}c\\ cA\\ cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 4 & -7 & 4\end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} Q_o=2<3$$

故系统不完全能观。

从中选取两线性无关行向量$[1 \quad -1 \quad 1]$和 $[2 \quad -3 \quad 2]$，再选取一个与之线性无关的行向量 $[0 \quad 0 \quad 1]$，构成非奇异线性变换矩阵：

$$P=\left[\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right] \qquad \Rightarrow P^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

则：

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline -5 & 3 & 2\end{array}\right]; \quad \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{Pb}=\left[\begin{array}{c}1 \\ 2 \\ \hline 1\end{array}\right]; \quad \bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{cP}^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

系统按能观测性分解的规范表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \hline \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline -5 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \hline \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

能观测子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{x}}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_o$$

不能观测子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{o}} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}_o + 2\bar{x}_{\bar{o}} + u, \quad y_{\bar{o}} = 0$$

三、线性定常系统的一般结构分解

结论1：对不完全能控和不完全能观测n维多输入多输出连续时间线性时不变系统

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad y=Cx$$

通过引入特定线性非奇异变换，可使系统结构实现规范分解，即有

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_{co}\\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}}\\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o}\\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}\tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\bar{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24}\\ \hline 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}o} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\tilde{x}_{co}\\ \tilde{x}_{c\bar{o}}\\ \tilde{x}_{\bar{c}o}\\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}\tilde{B}_{co}\\ \tilde{B}_{c\bar{o}}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right]u \qquad y=\left[\begin{array}{cc|cc}\tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\tilde{x}_{co}\\ \tilde{x}_{c\bar{o}}\\ \tilde{x}_{\bar{c}o}\\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

线性定常系统的传递函数矩阵与其能控能观测子系统的传递函数矩阵相同：

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\bar{C}_{co}(sI-\bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co}=G_{co}(s)$$

⬇

输入—输出描述只能反映系统的既能控又能观测部分，它是对系统的一个不完全描述。

例：设不能控且不能观测系统的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试对系统作能控能观测性规范分解。

解：1）系统按可控性分解。系统可控性判别阵：

$$Q_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\qquad \text{rank}\ Q_c=2<3$$

系统不完全可控，可控状态的维数为2。

选取进行可控性分解的变换阵：

$$P^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right] \qquad \Rightarrow P=\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ \hline 1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

则：

$$\overline{A}=PAP^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ \hline 0 & 0 & -1\end{array}\right] \qquad \overline{\boldsymbol{b}}=P\boldsymbol{b}=\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ \hline 0\end{array}\right]$$

$$\overline{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}P=\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -2\end{array}\right]$$

故有：

$$\dot{\bar{x}}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & -1\end{array}\right]\bar{x}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\ \hline 0\end{array}\right]u,\qquad y=\left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & -2\end{array}\right]\bar{x}$$

其中可控子系统为：

$$\dot{\bar{x}}_c=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\bar{x}_c+\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}\bar{x}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u,\qquad y_c=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\bar{x}_c$$

不可控子系统为：

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{c}}=-\bar{x}_{\bar{c}},\qquad y_{\bar{c}}=-2\bar{x}_{\bar{c}}$$

2)不可控子系统是一维的。输出方程 $y_{\bar{c}} = -2\bar{x}_{\bar{c}}$ 是可观测子系统，故令：

$$P_{\bar{c}o} = P_{\bar{c}o}^{-1} = 1$$

3）可控子系统的可观性规范分解。首先确定系统可观测状态的维数。系统可观测性判别阵：

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad rankQ_o = 1 < 2$$

可控子系统不完全可观测，可观测状态的维数为**1**。构造可观测性分解变换矩阵：

$$P_{co} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow P_{co}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

可观性规范分解的变换矩阵为：

$$P_o=\begin{bmatrix} P_{co} & 0 \\ 0 & P_{\bar{c}o} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow P_o^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

则引入变换 $\bar{\boldsymbol{x}}_c=P_o^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}$ ，即对按可控性分解后的系统按可观测性分解，得：

$$\tilde{A}=P_o\bar{A}P_o^{-1}=\left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad \tilde{b}=P_o\bar{b}=\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$\tilde{c}=\bar{c}P_o^{-1}=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

即系统按可控可观测性分解的结果为：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}
$$

原系统分解为co、$c\bar{o}$、$\bar{c}o$ 三部分。

四 最小实现

1．定义：对于传递函数矩阵$G(s)$的一个维数最低的实现，称为$G(s)$的最小实现或不可约简实现。

2．定理：设(A,B,C)为传递函数矩阵的一个n维实现，则其为最小实现的充要条件是$\{A,B\}$能控且$\{A,C\}$能观测。

3. 对*SISO*系统，如何直接利用传递函数确定最小实现？

设单输入单输出线性定常系统(***A*,*b*,*c***)的传递函数为：

$$G(s)=\boldsymbol{c}(sI-A)^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\alpha(s)}\boldsymbol{c}\cdot adj(sI-A)\cdot\boldsymbol{b}=\frac{N(s)}{\alpha(s)}$$

式中：$\alpha(s)=\det(sI-A)$ 是系统的特征多项式；

$N(s)=\boldsymbol{c}\cdot adj(sI-A)\cdot\boldsymbol{b}$ ，其中***adj*(*sI*-*A*)**为特征矩阵***sI*-*A***的伴随矩阵。

定理：系统实现(***A*,*b*,*c***)为最小实现，即为能控且能观测的充要条件是，$\alpha(s)$与$N(s)$互质。

例1

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

求系统特征值和传递函数极点

$$\det(sI-A)=(s-1)(s-3)=0 \Rightarrow s_1=1, s_2=3$$

$$G(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)} \Rightarrow s_1=1, s_2=3$$

既能控又能观

例2

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

求系统特征值和传递函数极点

既能控不能观

$$\det(sI-A)=(s-1)(s+1)=0 \Rightarrow s_1=1, s_2=-1$$

$$G(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s+1)}=\frac{1}{s-1} \Rightarrow s=1$$

4．对于传递函数矩阵$G(s)$，在不同的实现之间，一般情况下不是代数等价的，但在不同的最小实现之间，则一定是代数等价的。

例：已知系统传递函数为

$$G(s)=\frac{s+3}{s^3+10s^2+27s+18}$$

试求出系统的一个最小实现。

解：

$$G(s)=\frac{s+3}{s^3+10s^2+27s+18}=\frac{s+3}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$

$$=\frac{1}{s^2+7s+6}$$

写出其能控标准型实现，即为一个最小实现为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$