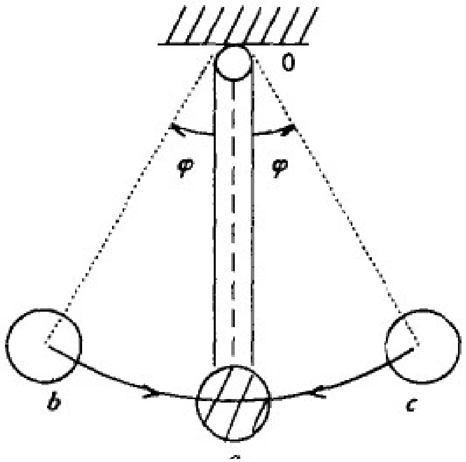
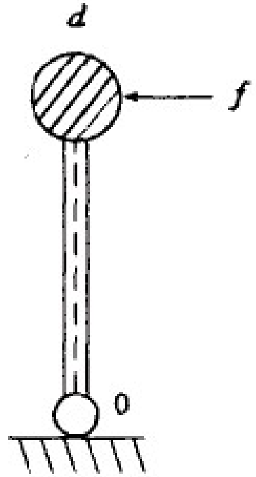
第5章 系统运动的稳定性

稳定性是系统的重要特性，是系统正常工作的必要条件。

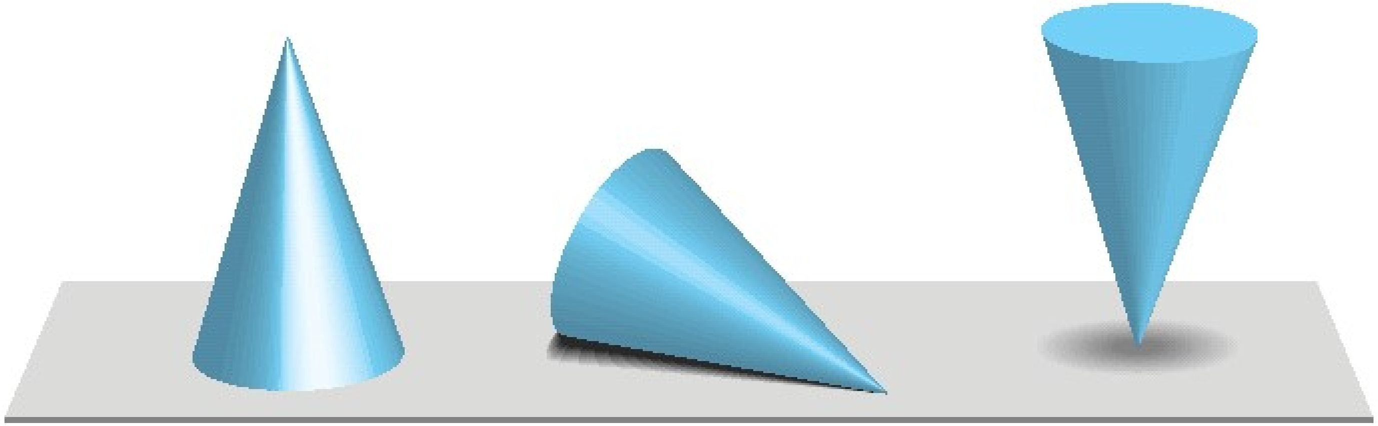
稳定的现象



稳定的摆



不稳定的摆



描述稳定性有两种方法

外部稳定性

通过系统的输入-输出关系来描述系统的稳定性。

内部稳定性

通过零输入下的状态运动响应来描述系统的稳定性。

在研究运动的内部稳定性时，为体现出系统自身结构的特点，常限于研究没有外部输入作用时的系统。也就是说内部稳定性表现为系统的零输入响应，即在输入恒为零时，系统的状态演变的趋势。

李雅普诺夫稳定性理论是确定系统稳定性的更一般性理论，不仅适用于线性定常系统，而且适用于非线性、时变系统。

李雅普诺夫第一法（间接法）

利用线性系统微分方程的解来判断系统稳定性。由于间接法需要解系统微分方程，并非易事，所以间接法的应用受到了很大的限制。

李雅普诺夫第二法（直接法）

先利用经验和技巧来构造李亚普诺夫函数，再利用李雅普诺夫函数来判断系统稳定性。直接法不需解系统微分方程，获得广泛应用。

5.1 外部稳定性和内部稳定性

一 外部稳定性

对于一个因果系统，假定系统的初始条件为零，如果对应于一个有界的p维输入u(t)，所产生的q维输出y(t)也是有界的，则称此系统是外部稳定的。也称为有界输入-有界输出稳定(BIBO稳定)。

线性时变系统BIBO稳定判据：

对于零初始条件的线性时变系统，G(t, τ)为其单位脉冲响应矩阵，则系统BIBO稳定的充要条件为：存在一个有限常数k，使对于一切 $t\in[t_0,\infty]$ $g_{ij}(t,\tau)\ (i=1,\cdots q;\ j=1,\cdots,p)$ ，G(t, τ)的每一个元均满足如下关系式：

$$\int_{t_0}^{t}\left|g_{ij}(t,\tau)\right|d\tau \le k < \infty$$

线性定常系统BIBO稳定判据：

对于零初始条件的线性定常系统，G(t)为其单位脉冲响应矩阵，G(s)为其传递函数矩阵，则系统BIBO稳定的充要条件为：存在一个有限常数k，G(t)的每一个元 $g_{ij}(t)\,(i=1,\cdots q;\, j=1,\cdots,p)$ 均满足如下关系式：

$$\int_0^t \left|g_{ij}(t)\right| dt \le k < \infty$$

或G(s)的所有极点均具有负实部。

二 内部稳定性

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(t_0) = x_0$$

$$y = C(t)x + D(t)u, t \in [t_0, t_\alpha]$$

令外界输入u=0，初始状态任意，如果零输入响应满足下列关系式：

$$\lim_{t \to \infty} x_{0u}(t) = 0$$

则称该系统为内部稳定，或渐近稳定。

线性时变系统内部稳定判据：

对n维连续时间线性时变自治系统，系统在时刻 t_0是内部稳定的充要条件为：状态转移矩阵对所有$t \in [t_0, \infty]$为有界，并满足渐近属性即成立：

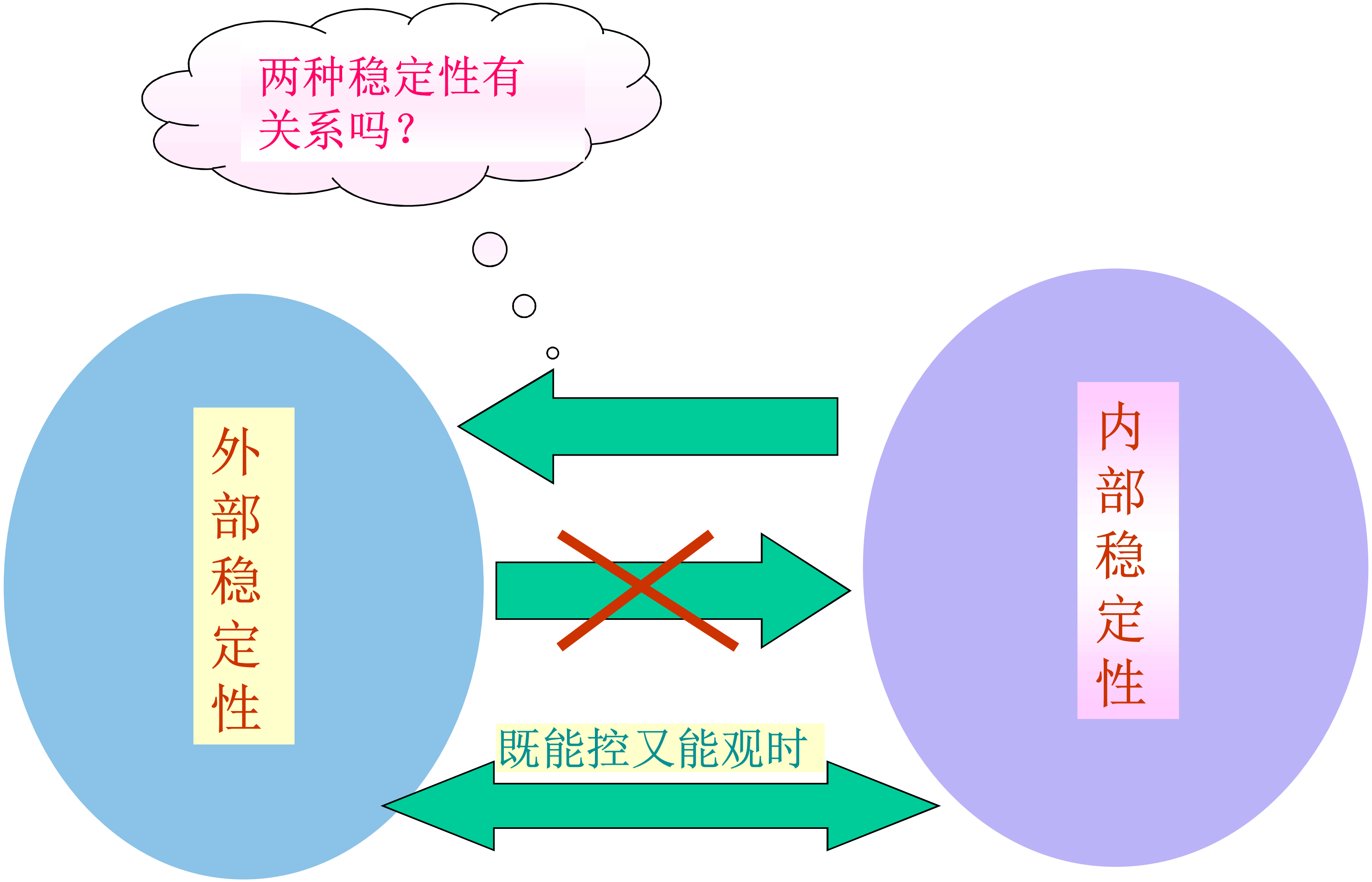
$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t, t_0) = 0$$

线性时不变系统内部稳定判据：

对n维连续时间线性时不变自治系统，系统是内部稳定的充要条件为：系统矩阵A所有特征值均具有负实部, 即成立：

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

三 线性定常系统内部稳定性和外部稳定性的关系



5.2 李雅普诺夫意义下运动稳定性的基本概念

1. 自治系统

没有外输入作用时的系统称为自治系统，可用如下系统状态方程来描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

式中：$\boldsymbol{x}$为$\boldsymbol{n}$维状态向量，$\boldsymbol{f(x,t)}$为线性或非线性、定常或时变的$\boldsymbol{n}$维函数。具体为$\boldsymbol{n}$个一阶微分方程:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t); \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

2. 受扰运动

假定自治系统状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

是满足解的存在且唯一性条件的，则可将系统由t_0初始时刻的初始状态$\boldsymbol{x}_0$所引起的运动（即状态方程的解）表为：

$$\boldsymbol{x}_{0u}(t) = \phi(t; \boldsymbol{x}_0, t_0), \quad t \in [t_0, \infty]$$

则初始状态$\boldsymbol{x}_0$必满足 $\phi(t_0;\boldsymbol{x}_0,t_0)=\boldsymbol{x}_0$。由于这一运动是由初始状态的扰动引起的，因此常称其为系统的受扰运动。

3. 平衡状态(※)

对于所有t，满足$\boxed{\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0}$的状态$x_e$称为平衡状态。

- 若已知系统状态方程，令$\dot{x} = f(x, t) = 0$所求得的解x，就是平衡状态。
- 在大多数情况下，$x_e=0$即状态空间原点为系统的一个平衡状态。此外系统也可以有非零平衡状态。
- 系统运动的稳定性，就是研究其平衡状态的稳定性，也即偏离平衡状态的受扰运动能否依靠系统内部的结构因素而返回到平衡状态，或者限制在它的一个有限邻域内。

4 李雅普诺夫意义下的稳定性

假若对于任意实数 $\varepsilon > 0$，都存在一个实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ，使得从满足下式

$$\| x_0 - x_e \| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

$\|\bullet\|$ 为欧几里得范数，其几何意义是空间距离的尺度。

的初始状态x_0出发的系统的所有解都满足不等式

$$\| \phi(t; x_0, t_0) - x_e \| \le \varepsilon, t \ge t_0$$

则称该系统的平衡态是李雅普诺夫意义下稳定的。

该定义的几何含义是：设系统初始状态x_0位于以平衡状态x_e为球心、δ为半径的闭球域$S(\delta)$内，即

$$\| x_0 - x_e \| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

若能使系统方程的解$x(t;x_0,t_0)$在$t\to\infty$的过程中，都位于以x_e为球心，任意规定的半径为ε的闭球域$S(\varepsilon)$内，即

$$\| \phi(t; x_0, t_0) - x_e \| \le \varepsilon, \qquad t \ge t_0$$

则称平衡状态x_e在李雅普诺夫意义下是稳定的。

在上述稳定的定义中，实数δ通常与ε和初始时刻t_0都有关，如果δ只依赖于ε，而和t_0的选取无关，则称平衡状态是一致稳定的。

5. 渐近稳定性

若系统的平衡状态x_e不仅具有李雅普诺夫意义下的稳定性，且有

$$\lim_{t\to\infty} \| \phi(t;x_0,t_0) - x_e \| = 0$$

则称此平衡状态x_e是渐近稳定的。

- 经典控制理论中的稳定性定义与渐近稳定性对应。
- 若δ与t_0无关，且上式的极限过程与t_0无关，则称平衡状态是一致渐近稳定的。
- 从工程观点而言，渐近稳定更为重要。渐近稳定即为工程意义下的稳定，而李雅普诺夫意义下的稳定则是工程意义下的临界不稳定。

6 大范围(全局)渐近稳定性

如果对于任意初始状态$\boldsymbol{x}_0$，都能保证

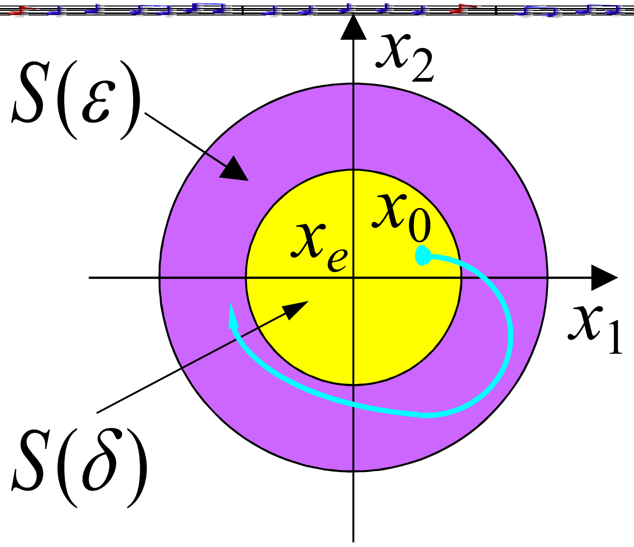
$$\lim_{t\to\infty}\|\phi(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)-\boldsymbol{x}_e\|=0$$

成立，则称系统的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$是大范围渐近稳定的，也称为全局渐近稳定。

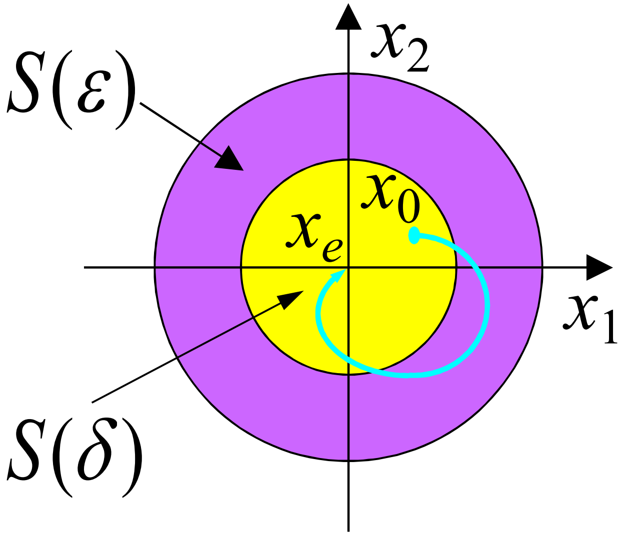
全局渐近稳定系统只能有一个平衡状态！！

7 不稳定性

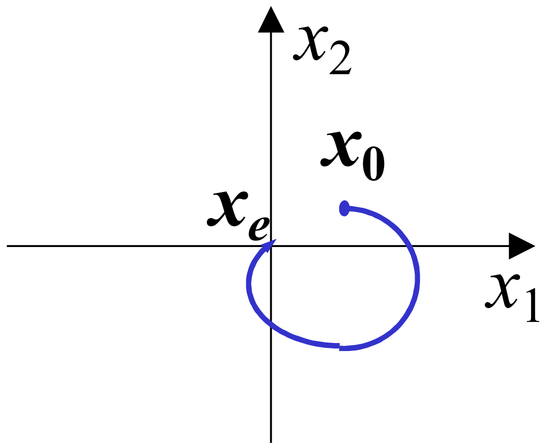
如果对于某个实数 $\varepsilon>0$和任一实数 $\delta>0$，不管 ε 多么大, 也不管$\boldsymbol{\delta}$有多么小，在$S(\delta)$内总存在着一个状态x_0，使得由这一状态出发的轨迹超出$S(\varepsilon)$，则平衡状态x_e就称为是不稳定的。



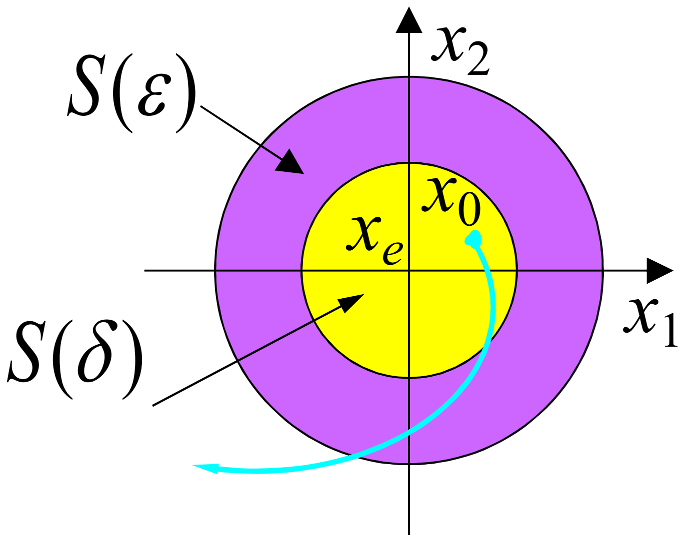
$\boldsymbol{x}_e$ 李雅普诺夫意义下稳定



$\boldsymbol{x}_e$ 渐近稳定



x_e 全局渐近稳定



$\boldsymbol{x}_e$ 不稳定

5.3 李雅普诺夫第二法的主要定理

李雅普诺夫第二法直接从系统的状态方程出发，通过构造一个类似于“能量”的李亚普诺夫函数，并分析它和其一阶导数的符号特征，从而获得系统稳定性的有关信息。该方法无需求出系统状态方程的解，故又称为直接法。

一．基本概念回顾

1．正定矩阵：

设实系数二次型$f(x)=x^TAx$，其中A是实对称方阵，如果对任何不全是零的实数$x_1,\cdots,x_n$，简记为$x\neq 0$，函数值$f(x)>0$，则称f是正定的，同时也称A是正定的，记为$A>0$。

- 单位阵是正定的：$x^T I_n x = x_1^2 + \cdots + x_n^2$
- 对角阵$D=diag\{d_1,\ldots, d_n\}$正定的充要条件是所有对角元素$d_i>0$。这是因为

$$f(x) = x^T Dx = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2 > 0$$

的充要条件是$d_i>0$。

- $A>0$的充要条件是

① 存在可逆实方阵C，使$A=C^TC$。

② A的所有特征值全都大于0。

③ A顺序主子式(即位于左上角的主子式)全大于0，即

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

2．正定函数：

- 标量函数$V(x)$对所有S域（域S包含状态空间的原点）中的非零状态x有$V(x)>0$且$V(0) = 0$，则称$V(x)$在S域内是正定的。

- 如果时变函数$V(x,t)$有一个正定函数作为下限，也就是说，存在一个正定函数$W(x)$，使得

$$V(\mathbf{x},t) \geq W(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{0},t) = 0, \qquad t \geq t_0$$

则称时变函数$V(x,t)$在域S（域S包含状态空间的原点）内是正定的。

3. **负定函数**：如果$-V(x)$是正定函数，则标量函数$V(x)$为负定函数。

4. **正半定函数**：如果标量函数$V(x)$除了原点及某些状态处等于零外，在域S内的所有其它状态都是正定的，则$V(x)$为正半定函数。

5. **负半定函数**：如果$-V(x)$是正半定函数，则标量函数$V(x)$称为负半定函数。

6. **不定函数**：如果不论域S多么小，在域S内的$V(x)$可能是负值也可能为正值，则标量函数$V(x)$称为不定函数。

二 李雅普诺夫第二法主要定理

1 大范围一致渐近稳定判别定理(时变)

<u>结论5.10</u>：对于时变系统 $\dot{x}=f(x,t)$，$t\geq t_0$，如果存在一个对状态x和时间t具有连续一阶偏导数标量函数$V(x,t)$，$V(0,t)=0$，且满足如下条件：

（1） $V(x,t)$正定且有界；

（2） $\dot{V}(x,t)$负定且有界；

（3） 当||x||→∞时，$V(x,t)\to\infty$。

则系统的原点平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

2 结论5.11（定常系统大范围渐近稳定判别定理1）

对于定常系统 $\dot{x}=f(x),\ t\geq 0$，其平衡状态 $x_e=0$，如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$，$V(0)=0$，并且对于状态空间中的一切非零 x 满足如下条件：

（1） $V(x)$ 为正定；

（2） $\dot{V}(x)$ 为负定；

（3） 当 $||x||\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

例5.1：设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

试确定系统的稳定性。

解：显然，原点(x_1=0，x_2=0)是该系统唯一的平衡状态。

选取正定标量函数为：$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

则沿任意轨线$V(x)$对时间的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

是负定的。故$V(x)$是系统的一个李雅普诺夫函数。由于当$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，*故系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。*

3 结论5.12（定常系统大范围渐近稳定判别定理2）

对于定常系统 $\dot{x}=f(x)$，$t\geq 0$，其平衡状态 $x_e=0$，如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$，$V(0)=0$，并且对于状态空间中的一切非零 x 满足如下条件：

(1) $V(x)$ 为正定；

(2) $\dot{V}(x)$ 为负半定；

(3) 对任意初始状态，$\dot{V}(\phi(t;x_0,0))\neq 0$；

(4) 当 $||x||\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

4. 结论5.19不稳定判别定理

对于定常系统，如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数V（x），其中V（x）=0，满足：

（1） $V(x)$为正定；

（2） $\dot{V}(x)$为正定；

则系统平衡状态为不稳定

三 李亚普诺夫函数的构造方法

----克拉索夫斯基方法

非线性定常系统： $\dot{x} = f(x)$， $t \geq 0$

其中， f(0)=0, 即原点是系统唯一的平衡状态。

$$f(x) = [f_1(x) \quad \cdots \quad f_n(x)]^T$$

系统的雅可比矩阵为：

$$F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

定理1：对连续非线性定常系统 $\dot{x} = f(x)$，$t \geq 0$ 和围绕原点平衡态的域Ω，若

$$F^T(x) + F(x) < 0, \forall x \neq 0$$

则有：

$$\dot{V}(x) < 0$$

其中

$$V(x) = f^T(x) f(x)$$

定理2(克拉索夫斯基)：对连续非线性定常系统和围绕原点平衡态的域Ω，原点为域内唯一平衡态，若

$$F^T(x)+F(x)<0, \forall x \neq 0$$

则系统原点平衡态为域Ω内渐近稳定平衡态。

且 $V(x)=f^T(x)f(x)$ 为一个李亚普诺夫函数。

定理3：对线性定常系统 $\dot{x} = Ax$，A为非奇异矩阵，若

$$A^T + A<0, \forall x \neq 0$$

则系统原点平衡态为大范围渐近稳定平衡态。

5.4 连续时间线性系统的状态运动稳定性判据

一 线性时不变系统的特征值稳定判据

结论5.22/5.23[特征值判据]：考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0,\ t \geq 0,$$

◆系统的每一平衡态是李亚普诺夫意义下稳定的充要条件是：系统矩阵A的所有特征值均具有非正（负或零）实部，且具有零实部的特征值为A的最小多项式的单根；

◆系统的唯一平衡态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的充要条件是：系统矩阵A的所有特征值均具有负实部。

最小多项式（补充）：

对于任意一个n阶方阵A，总存在一个多项式$f(s)$满足$f(A)=0$，这样的多项式称为A的一个化零多项式。

由凯莱—哈密尔顿定理可知任意一个方阵A都是它的特征方程：

$$\alpha(s)=\det\left(sI-A\right)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0=0$$

的根，即 $\alpha(A)=0$,故矩阵A的特征多项式是A的一个化零多项式。

方阵A的化零多项式不唯一，有无穷多个，*在所有化零多项式中，次数最低且最高次幂项系数为1的多项式称为A的最小多项式。*

定理：已知

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}=\frac{adj(sI-A)}{\alpha(s)}$$

设$m(s)$为$adj(sI-A)$中所有元素的首1最大公约式，

则 $\dfrac{\alpha(s)}{m(s)}$ 为矩阵A的最小多项式。

注：换言之，矩阵A的最小多项式就是$(sI-A)^{-1}$中所有元素的最小公分母。

例（补充）：判断下述线性定常系统的稳定性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解：1）系统矩阵A为奇异矩阵，故系统存在无穷多个平衡状态。系统的平衡状态为 $\boldsymbol{x}_e = [x_1 \quad x_2 \quad 0]^T$，其中$x_1$和$x_2$为任意实数，即状态空间中$x_1$—$x_2$平面上的每一个点均为平衡状态。

2）解系统的特征方程

$$\det(sI - A) = s^2(s+1) = 0$$

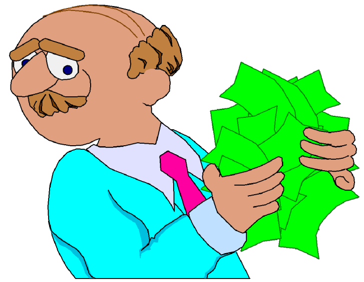
零实部！！

得特征值分别为：$\lambda_1 = -1 \ , \lambda_2 = \lambda_3 = 0$。

3）

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2(s+1)}\begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$



故最小多项式为$f(s)=s(s+1)$。系统所有特征值均具有非正实部，且具有零实部的特征值是最小多项式的单根，<u>因此系统的每一个平衡状态都是李雅普诺夫意义下稳定的。</u>

例：判断下述线性定常系统的稳定性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解：系统矩阵$\boldsymbol{A}$为非奇异，显然原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是系统的唯一平衡状态。 解系统的特征方程

$$\det(sI - A) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+1)(s+2)(s+3) = 0$$

得特征值分别为：$\lambda_1 = -1$， $\lambda_2 = -2$， $\lambda_3 = -3$

系统的所有特征值都具有负实部，所以系统的唯一平衡状态$\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$是渐近稳定的。

二 线性时不变系统的李亚普诺夫稳定判据

设线性定常系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,\ \ t \geq 0,$$

$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵。故状态空间的原点是系统的唯一平衡状态。通常可选取正定二次型函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$$

作为可能的李雅普诺夫函数。现在只需保证$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是负定的，则根据定常系统大范围渐近稳定判别定理1，可断定系统是大范围渐近稳定的。

推导$V(x)$对时间导数满足要求的条件：

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x$$

令：

$$\boxed{A^T P + PA = -Q}$$

李亚普诺夫矩阵代数方程

欲使 $\dot{V}(x)$ 是负定函数，即要求矩阵Q是任意正定矩阵。根据定常系统大范围渐近稳定判别定理1，只要给定一个正定矩阵Q，李雅普诺夫矩阵代数方程：

$$A^T P + PA = -Q$$

有正定解P，系统就是大范围渐近稳定的。

结论5.24 ※　线性定常系统

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$

的原点平衡状态 $x_e = 0$ 为渐近稳定的充分必要条件是，对于任意给定的一个正定对称矩阵Q，李雅普诺夫矩阵方程

$$\boxed{A^T P + PA = -Q}$$

有唯一正定对称矩阵解P。

注意：使用中常选取Q阵为单位阵或对角阵。

例（※） 设线性定常连续系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}x$$

试用李雅普诺夫方程判断系统的稳定性。

解：令李雅普诺夫方程为

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q=-\mathrm{I}\ ,$$

$$P=P^{T}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$$

则有：

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

得到：

$$\begin{bmatrix} 4p_{12} & p_{11}-p_{12}+2p_{22} \\ p_{11}-p_{12}+2p_{22} & 2p_{12}-2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

得到3个线性方程：

$$\begin{cases} 4p_{12} = -1 \\ p_{11}-p_{12}+2p_{22} = 0 \\ 2p_{12}-2p_{22} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = -0.75 \\ p_{12} = -0.25 \\ p_{22} = 0.25 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

由于 $p_{11} = -0.75 < 0,\ \ \det P = -0.25 < 0$，故$\boldsymbol{P}$不是正定矩阵，则系统不是渐近稳定的。

为了对比，下面用李亚普诺夫间接法判断：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

$\boldsymbol{A}$是非奇异矩阵，故$\boldsymbol{x_e}$=0是系统的唯一平衡状态，且

$$\det(s\mathrm{I} - A) = s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2) = 0$$

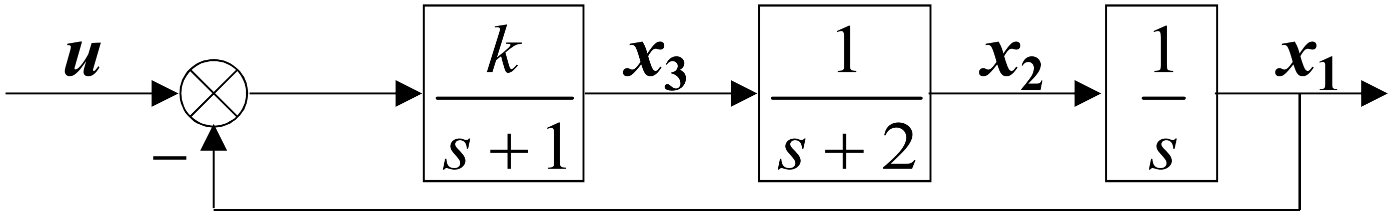
解得特征值为：

$$\lambda_1 = 1，\lambda_2 = -2，$$

有一个特征值具有正实部，故系统不稳定。

根据系统大范围渐近稳定判别定理**2**可以推知，若系统任意的状态轨迹在非零状态不存在 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 恒为零时，***Q***阵可选择为正半定的，即允许***Q***取单位阵时主对角线上部分元素为零，而解得的***P***阵仍应正定。

例:设系统为



试用李雅普诺夫方程确定系统渐近稳定的*k*值。

解：根据图中定义的状态变量，得到状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u,$$

因$\det A=-k\neq 0$，A非奇异，故原点是系统的唯一平衡状态。

假定Q取为正半定矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则 $\dot{V}(x)=-x^TQx=-x_3^2$，$\dot{V}(x)$为负半定。

令$\dot{V}(x)\equiv 0$，有 $x_3\equiv 0$

$$\dot{x}_3=-kx_1-x_3\Rightarrow x_1\equiv 0$$

$$\dot{x}_1=x_2\Rightarrow x_2\equiv 0$$

表明惟有原点使 $\dot{V}(x)\equiv 0$，故可以采用正半定Q来简化稳定性分析。

令李雅普诺夫方程： $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$，

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

得到以下**6**个线性方程：

$$\begin{cases} -2kp_{13}=0; \\ -kp_{23}+p_{11}-2p_{22}=0; \\ -kp_{33}+p_{12}-p_{13}=0; \\ 2p_{12}-4p_{22}=0; \\ p_{13}+p_{22}-3p_{23}=0; \\ 2p_{23}-2p_{33}=-1; \end{cases}$$

解得：

$$P=\begin{bmatrix} \frac{k^2+12k}{12-2k} & \frac{6k}{12-2k} & 0 \\ \frac{6k}{12-2k} & \frac{3k}{12-2k} & \frac{k}{12-2k} \\ 0 & \frac{k}{12-2k} & \frac{6}{12-2k} \end{bmatrix};$$

***P*为正定矩阵的充要条件是：**

$$\Delta_1=\frac{k(k+12)}{2(6-k)}>0; \qquad \Delta_2=\frac{3k^3}{2(6-k)}>0; \qquad \Delta_3=\frac{k^3}{2}>0;$$

解得 **0< *k* <6**，系统渐近稳定。

为了比较，用间接法判断：

$x_e = 0$ 是系统的唯一平衡状态，且

$$\det(sI - A) = s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

据劳斯判据，确定保证系统渐近稳定的**k**值范围：

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & \dfrac{6-k}{3} & 0 \\ s^0 & k & \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6-k}{3} > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

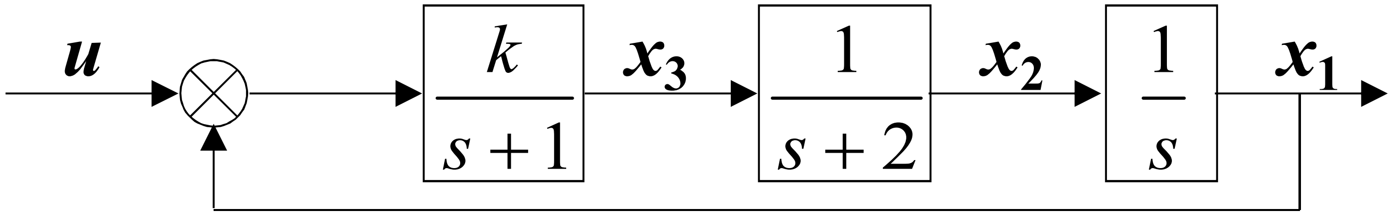
故**0<** ***k*** **<6**时，所有特征值均具有负实部，系统稳定。

定理（补充） 对于所选择的正半定矩阵$\boldsymbol{Q}$，在$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}\}$完全可观测的条件下，即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Q \\ QA \\ \vdots \\ QA^{n-1} \end{bmatrix} = n;$$

系统为渐近稳定的充分必要条件是，李雅普诺夫方程有唯一正定解$\boldsymbol{P}$。

例:设系统为



试用李雅普诺夫方程确定系统渐近稳定的*k*值。

解：根据图中定义的状态变量，得到状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u,$$

因 $\det A = -k \neq 0$，A 非奇异，故原点是系统的唯一平衡状态。

假定*Q*取为正半定矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则 $\dot V(x)=-x^TQx=-x_3^2$ 为负半定。

令 $\dot V(x)\equiv 0$，有 $x_3\equiv 0$

$$\dot x_3=-kx_1-x_3\Rightarrow x_1\equiv 0$$

$$\dot x_1=x_2\Rightarrow x_2\equiv 0$$

表明惟有原点使 $\dot V(x)\equiv 0$，故可以采用正半定的*Q*来简化稳定性分析。

检查{*A*,*Q*}的可观性：

$$V=\begin{bmatrix}Q\\QA\\QA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\-k&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\\k&-k&1\end{bmatrix}$$

$\text{rank }V=3$，{*A*,*Q*}完全可观测

故该正半定的*Q*可以采用。

令李雅普诺夫方程： $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$，

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

得到以下**6**个线性方程：

$$\begin{cases} -2kp_{13}=0; \\ -kp_{23}+p_{11}-2p_{22}=0; \\ -kp_{33}+p_{12}-p_{13}=0; \\ 2p_{12}-4p_{22}=0; \\ p_{13}+p_{22}-3p_{23}=0; \\ 2p_{23}-2p_{33}=-1; \end{cases}$$

解得：

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{k^2+12k}{12-2k} & \dfrac{6k}{12-2k} & 0 \\ \dfrac{6k}{12-2k} & \dfrac{3k}{12-2k} & \dfrac{k}{12-2k} \\ 0 & \dfrac{k}{12-2k} & \dfrac{6}{12-2k} \end{bmatrix};$$

P为正定矩阵的充要条件是：

$$\Delta_1=\frac{k(k+12)}{2(6-k)}>0; \qquad \Delta_2=\frac{3k^3}{2(6-k)}>0; \qquad \Delta_3=\frac{k^3}{2}>0;$$

解得 **0< *k* <6**，系统渐近稳定。