6.3 全维状态观测器

- 问题的提出
- 全维状态观测器
  - ✓观测器的结构形式
  - ✓观测器的存在条件
  - ✓观测器综合算法

一、问题的提出

n 维的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$

$$y = Cx$$

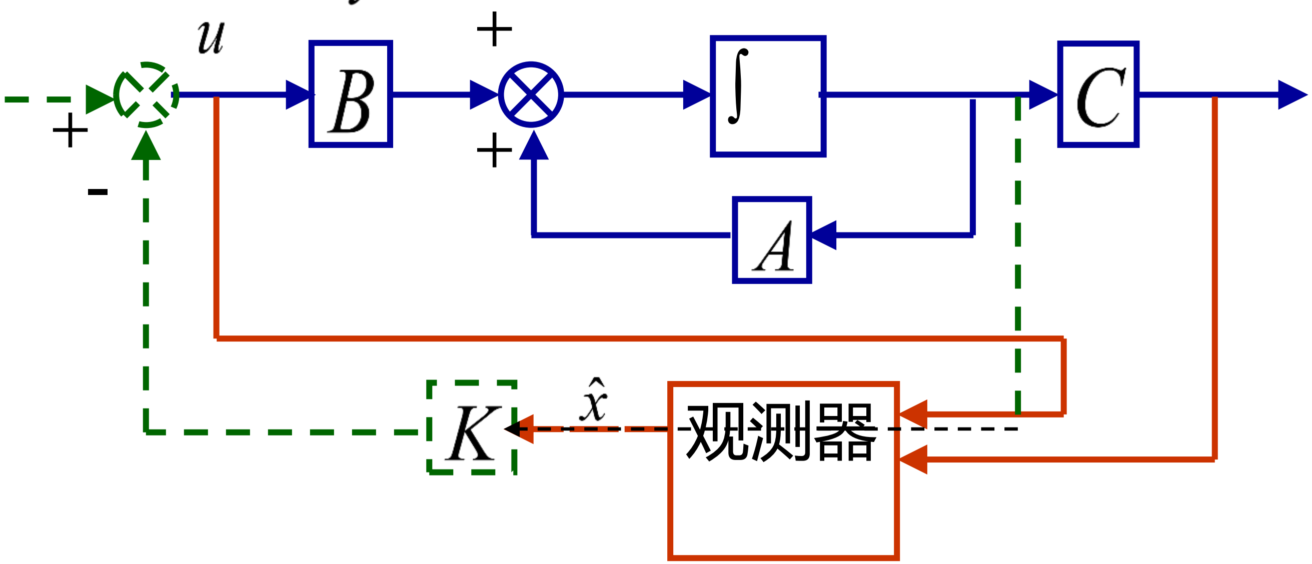


图1　状态重构问题的直观说明

图1　加入状态反馈后的系统结构图

状态观测器：输出 $\hat{x}(t)$ 渐近等价于原系统状态 $x(t)$ 的观测器，即以

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)$$

为性能指标综合得到的观测器。

状态观测器

- **全维状态观测器**：重构状态向量的维数等于被控对象状态向量的维数
- **降维状态观测器**：重构状态向量的维数小于被控对象状态向量的维数

二、全维状态观测器

1、观测器的结构形式

考虑n维线性时不变系统

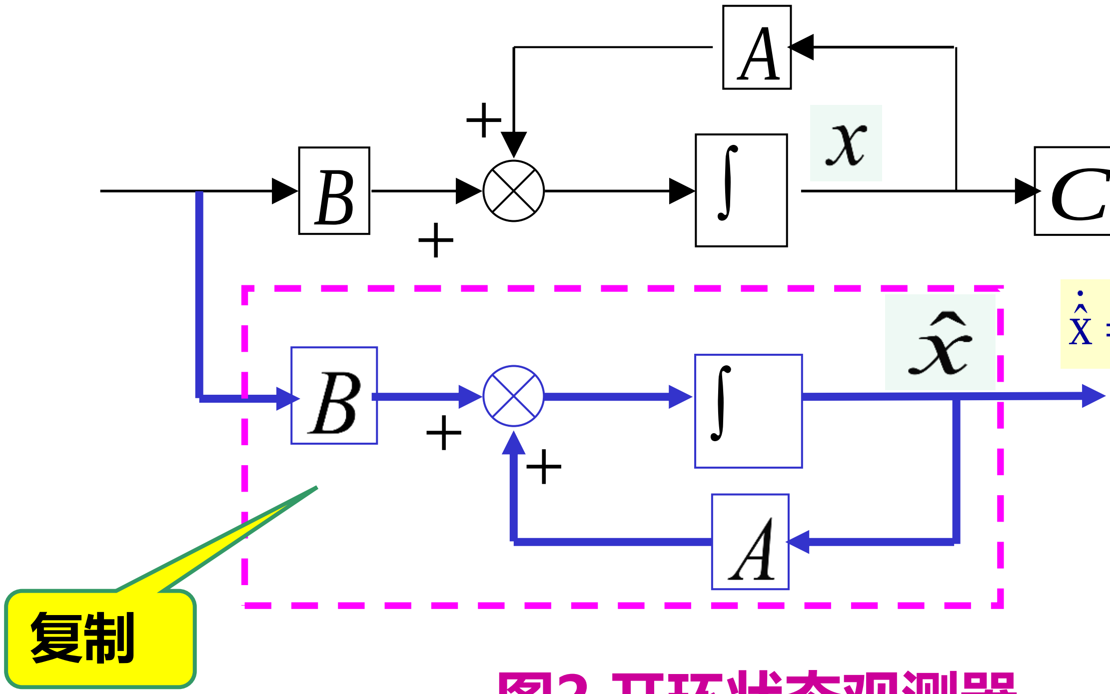
$$\dot{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + B\mathrm{u} \qquad x(0) = x_0$$
$$y = C\mathrm{x} \qquad t \geq 0$$

要求观测器系统的输出满足如下关系：

$$\lim_{t \to \infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \to \infty} x(t)$$

1) 开环观测器

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx \qquad t \geq 0$$



被控系统

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad t \geq 0$$

开环状态观测器

图2 开环状态观测器

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x})$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \hat{x} \\ \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} \\ \tilde{x} = e^{At}(x_0 - \hat{x}_0) \end{cases}$$

开环观测器的状态方程为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad t \geq 0$$

式中：$\hat{x}$ 是被控对象状态向量x的估计值.

2) 全维闭环状态观测器

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx \qquad t \geq 0$$

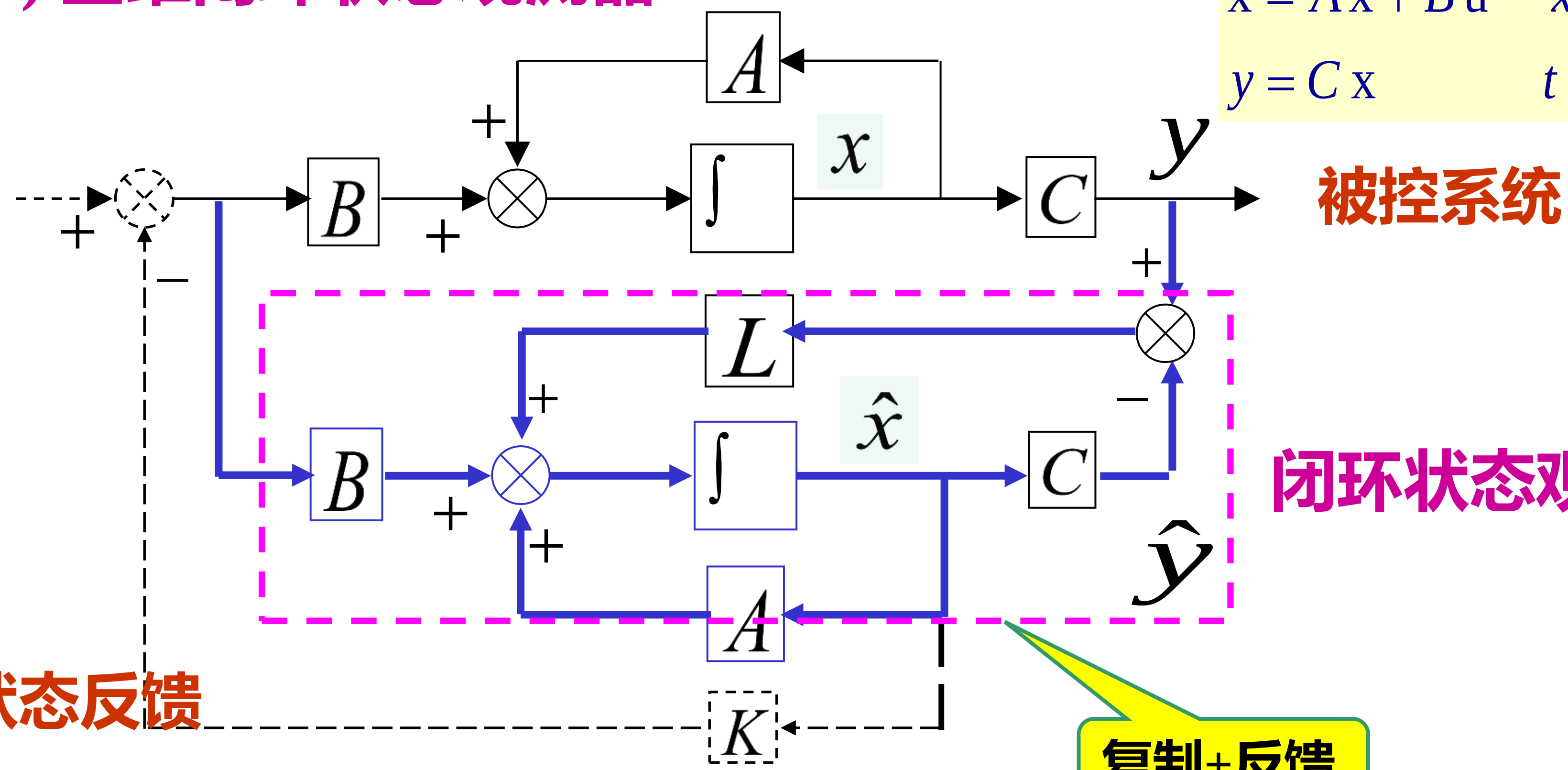


图3 全维状态观测器

全维闭环状态观测器状态空间描述为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

观测器输出反馈阵

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx \qquad t \ge 0$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

原系统的状态方程与观测器方程相减

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})]$$
$$= Ax - Ly + Bu - (A - LC)\hat{x} - Bu$$
$$= (A - LC)(x - \hat{x})$$

令 $\tilde{x}$ 为状态估计误差

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \hat{x} \qquad \dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \\ \tilde{x} = e^{(A-LC)t}(x_0 - \hat{x}_0) \end{cases}$$

由上式可知，如果适当选择L 矩阵，使(A-LC) 的所有特征值具有负实部，则 $\lim_{t\to\infty}(x - \hat{x}) = 0$ $\hat{x}$ 就是重构的状态。

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}),\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly,\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

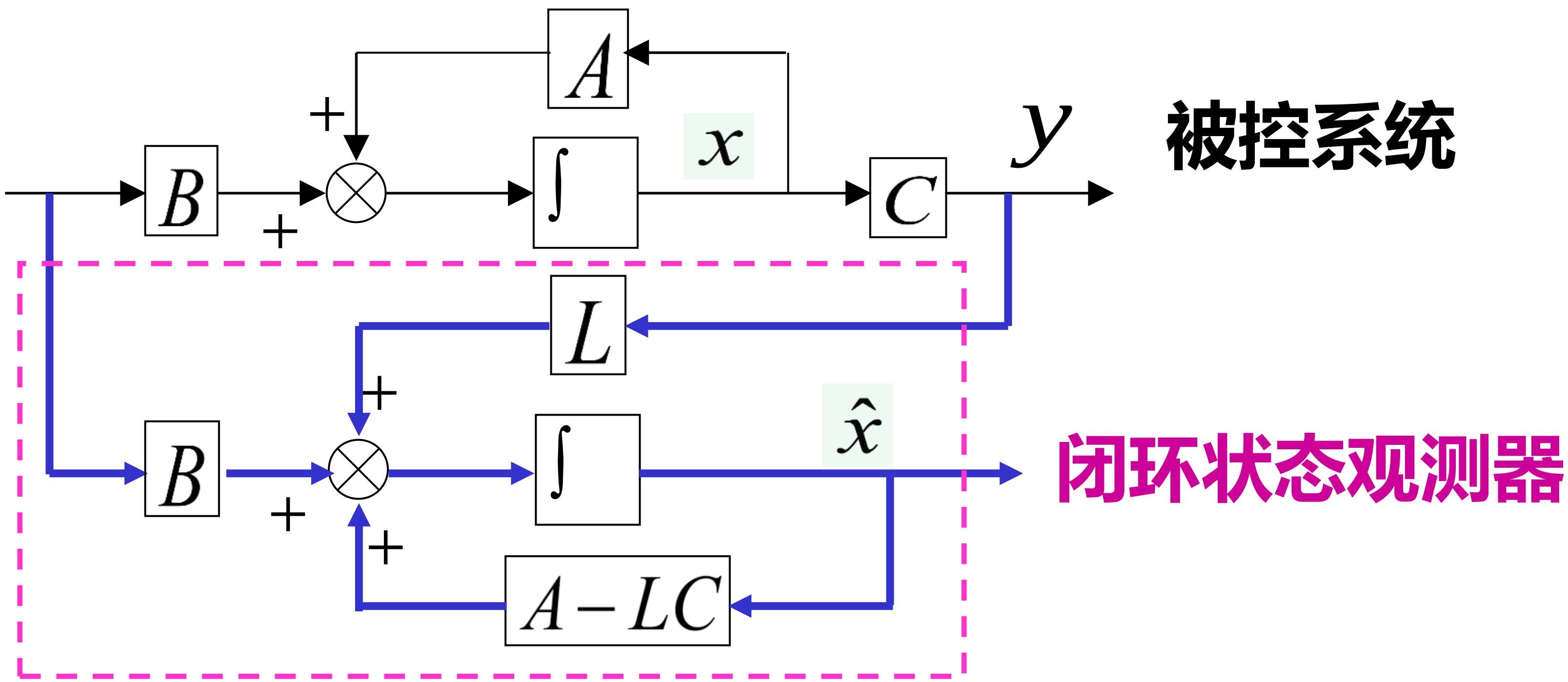


图4 全维状态观测器

2、观测器的存在条件

定理：系统的渐近状态观测器存在的充分必要条件是系统能观测，或者系统虽然不能观测，但是其不能观测的子系统的特征值具有负实部。

由对偶原理：

系统(A,B,C) 能观测	→	对偶系统 (A^T,C^T,B^T) 能控

针对 (A,C) 设计状态观测器增益矩阵 L ，等价于

针对 (A^T,C^T) 设计状态反馈增益矩阵 L^T 。

$$\det\left(sI-A+LC\right)=\det\left(sI-A+LC\right)^T=\det\left(sI-A^T+C^TL^T\right)=\alpha^*(s)$$

基于系统镇定问题的相关讨论可以得到定理的结论。

观测器的特征值可任意配置条件

定理：若被控系统(*A*,*C*)可观测，则必可采用

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

所示的全维状态观测器来重构其状态，并且必可通过选择增益阵*L*而任意配置(*A* -*LC*)的全部特征值。

证明:

系统(A,B,C)能观测 → 对偶系统(A^T,C^T,B^T)能控

↓

$$\det\left(sI-A^T+C^TL^T\right)=\alpha^*(s)$$

↓

$$\det\left(sI-A+LC\right)=\alpha^*(s)$$

即$(A-LC)$的特征值可由L任意配置

3、观测器综合算法

对于给定的*n*维被控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

设系统(*A*,*B*,*C*)可观测，给定全维状态观测器的一组期望的特征值: $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*$**，设计如下所示的全维状态观测器。**

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

方法一：系数比较法

1）计算期望的特征多项式

$$\alpha^*(s)=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)\cdots(s-\lambda_n^*)$$
$$=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*$$

2）设反馈增益阵 $l=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & \cdots & l_n\end{bmatrix}^T$，用待定系数计算闭环观测系统特征多项式

$$\alpha(s)=\det(sI-A+LC)$$
$$=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

其中：系数$\{a_i\}$中包含未知元素$\{l_i\}$。

3）求解下列*n*个方程，计算出反馈矩阵*L*的元素

$$a_{n-1}=a_{n-1}^{*},\quad \cdots,\quad a_{1}=a_{1}^{*},\quad a_{0}=a_{0}^{*}$$

4）计算(*A*-*LC*)，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly$$

而 $\hat{x}$ 即为*x*的估计状态。

方法二：规范算法

1）导出被控系统(A,B,C)的对偶系统(A^T,C^T, B^T)；

2）利用完全可控系统极点配置的规范算法，计算系统(A^T,C^T, B^T)的反馈增益阵L^T；

3）计算$(A-LC)$，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

而 $\hat{x}$ 即为x的估计状态。

例：给定系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

观测器系统的特征值为：$\lambda_{1,2}^{*}=-10\pm 10j$**，试构造全维状态观测器.**

解：方法一

$$rank\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

该系统能观测，可任意配置全维状态观测器的极点。

1) 期望特征多项式：

$$\alpha^{*}(s)=(s+10+10j)(s+10-10j)=s^{2}+20s+200$$

2）设增益阵 $L=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$，闭环观测系统特征多项式为

$$\alpha(s)=\det(sI-A+LC)=\begin{vmatrix} s+l_1 & -1 \\ l_2-9 & s \end{vmatrix}=s^2+l_1 s+(l_2-9)$$

3）得到方程组：

$$\begin{cases} l_1=20 \\ l_2-9=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1=20 \\ l_2=209 \end{cases} \qquad \therefore \quad L=\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}$$

4）设计的全维状态观测器为：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A-Lc)\hat{x}+bu+Ly \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\hat{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}y \\ &= \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}y \end{aligned}$$

方法二：

1) $\because rank\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$，该系统可观测，

$\therefore$ 其对偶系统(A^T, c^T, b^T)完全可控，故可以任意配置极点

2）用系统极点配置的规范算法，计算反馈增益阵L^T

① 观测器期望特征多项式：

$$\alpha^*(s) = (s+10+10j)(s+10-10j) = s^2 + 20s + 200$$

② 可控系统(A^T, c^T, b^T)的特征多项式：

$$\alpha(s) = \det(sI - A^T) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -9 & s \end{vmatrix} = s^2 - 9$$

③ 计算$\bar{k}$：　$\bar{k} = \begin{bmatrix} a_0^* - a_0 & a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209 & 20 \end{bmatrix}$

④ 变换矩阵P^{-1}:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}c^T & A^Tc^T\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

⑤ 系统(A^T,c^T,b^T)的反馈增益矩阵L^T:

$$L^T=\bar{K}P=\begin{bmatrix}209 & 20\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 209\end{bmatrix}$$

3）$L=\begin{bmatrix}20\\ 209\end{bmatrix}$设计的全维状态观测器为

$$\dot{\hat{x}}=(A-Lc)\hat{x}+bu+Ly$$

$$=\begin{bmatrix}-20 & 1\\ -200 & 0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}20\\ 209\end{bmatrix}y$$

例：已知系统的微分方程为 $\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=u$

设计全维状态观测器反馈矩阵 $L=[l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$

使观测器的极点为−2，−3，−5，并写出维状态观测器的状态方程。

解：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u \qquad y=[0 \quad 0 \quad 1]$$

能观，可实现闭环状态观测器极任意配置。

期望特征多项式:$(s+2)(s+3)(s+5)=s^3+10s^2+31s+30$

设 $L=[l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$

实际特征多项式：$\det(sI-A+LC)=s^3+(l_3+5)s^2+(l_2+3)s+(l_1+2)$

比较，得 $L=[28 \quad 28 \quad 5]^T$

$$\dot{\hat{x}}=(A-Lc)\hat{x}+bu+Ly \quad =\begin{bmatrix}0 & 0 & -30\\ 1 & 0 & -31\\ 0 & 1 & -10\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}28\\28\\5\end{bmatrix}y$$

已知系统的状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

设计全维状态观测器的反矩阵 $L=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\end{bmatrix}^T$，使观测器的极点配置在-3处，并写出全维状态观测的状态方程。

解： （1）状态空间描述为能观规范型，可实现观测器闭环极点的任意配置；

（2）期望特征多项式： $\alpha^*(s)=(s+3)^3=s^3+9s^2+27s+27$

（3）设 $L=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\end{bmatrix}^T$

$$\alpha(s)=\det(sI-A+LC)=s^3+(5+l_3)s^2+(4+l_2)s+l_1$$

（4）比较，得： $L=\begin{bmatrix}27 & 23 & 4\end{bmatrix}^T$

（5）全维状态观测器的状态方程为

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & -27\\ 1 & 0 & -27\\ 0 & 1 & -9\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}27\\ 23\\ 4\end{bmatrix}y$$

三 分离特性

现在要讨论的是用全维状态观测器提供的估计状态 $\hat{x}$ 代替真实状态 x 来实现状态反馈，其闭环特性与利用真实状态进行反馈的情况会有什么区别?

当观测器被引入系统以后，状态反馈系统部分是否会改变已经设计好的观测器的闭环极点配置，观测器输出反馈阵 L 是否需要重新设计?

考虑n维的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

假设系统是可观测的，则可设计全维状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

得到真实状态 x 的估计值 $\hat{x}$，引入状态反馈 $u = v - K\hat{x}$

此时状态反馈子系统的状态空间描述为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(v - K\hat{x}) = Ax - BK\hat{x} + Bv \\ y &= Cx \end{aligned}$$

全维状态观测器的状态空间描述为：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - LC)\hat{x} + B(v - K\hat{x}) + LCx \\ &= (A - BK - LC)\hat{x} + LCx + Bv \end{aligned}$$

故组合系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A-BK-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

注意：引入全维状态观测器的状态反馈系统，其维数为被控系统和观测器系统的维数之和(2n维)。

作线性变换 $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$ $\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$

$$P\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ x-\hat{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

其中 $\tilde{x}=x-\hat{x}$ 为误差估计

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A-bK & bK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}V$$

$$y=\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

注：引入观测器使状态反馈控制系统（**2n**维）不再保持状态完全能控。

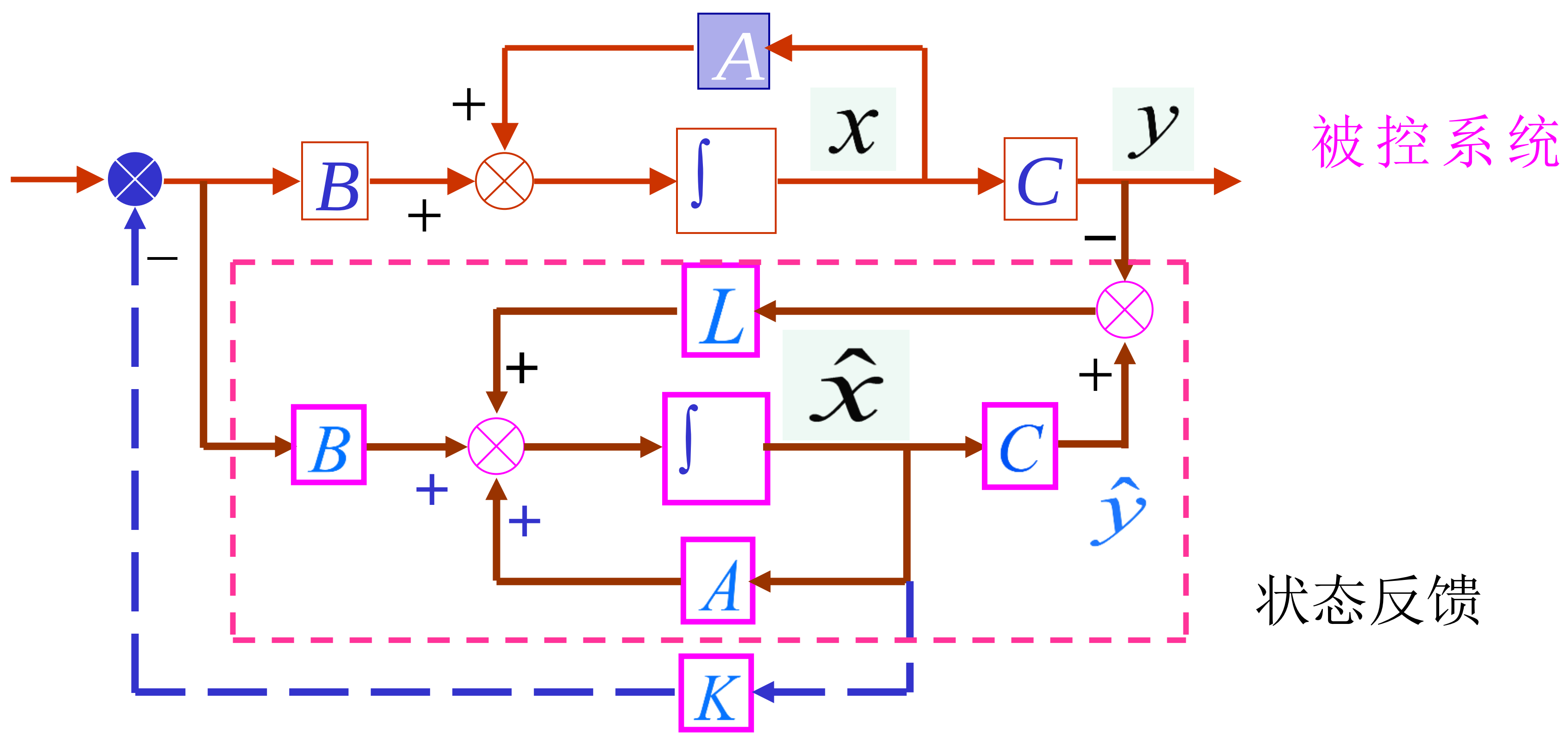
考虑到线性非奇异变换的不变性，组合系统的特征多项式为：

$$\alpha_k(s) = \det(sI - A + BK) \bullet \det(sI - A + LC)$$

考虑到线性非奇异变换的不变性，这时传递函数为：

$$g_K(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + bK & -bK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = C\left[sI - A + bK\right]^{-1} b$$

注：引入观测器不改变直接状态反馈控制系统的传递函数矩阵



含有全维状态观测器的状态反馈系统

分离定理：若被控系统{*A*, *B*, *C*}完全能控且完全能观测，利用状态观测器的状态估计值实现状态反馈控制系统时，<u>状态反馈矩阵 *K* 的设计和观测器中输出反馈矩阵 *L* 的设计可以独立进行。</u>

例:设系统动态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}x$

1）**设计一状态观测器估计系统的状态，观测器的特征值为**−3、−5。

2）**用估计出的状态进行状态反馈，设计一状态反馈矩阵，使系统的闭环特征值为**−1±j。

3）**画出整个闭环系统的结构框图。**

解：1) $rank\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}2 & 3\\ -6 & -7\end{bmatrix}=2$ **系统状态完全能观。**

期望特征多项式： $\alpha^*(s)=(s+3)(s+5)=s^2+8s+15$

令$L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}$**实际特征多项式：**$\det(sI-A+Lc)=s^2+(3l_2+2l_1)s+2+2l_2$

比较，得 $L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7.25\\ 6.5\end{bmatrix}$

状态观测器为：

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+bu+Ly=\begin{bmatrix}14.5 & 22.75\\ -15 & -2\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-7.25\\ 6.5\end{bmatrix}y$$

2) $$rank\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}=2$$

系统状态完全能控，可以实现极点任意配置。

期望特征多项式： $(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$

令 $k=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$

实际特征多项式： $\det(sI-A+bk)=s^2+(3+k_2)s+2+k_1$

比较，得 $k=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}$

3) 整个闭环系统的结构框图如下：