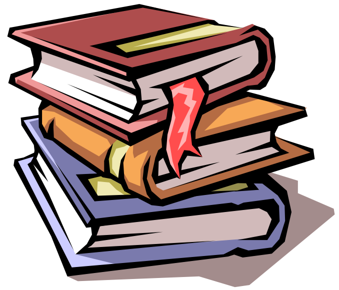
第八章 非线性控制系统分析



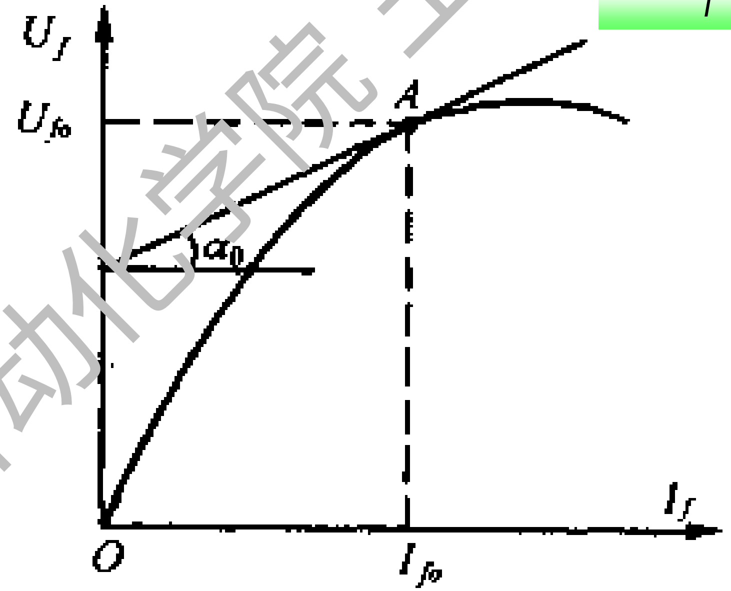
自动化学院 王辉

哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

非线性控制系统问题的引出

小偏差线性化法或者切线法

$$\Delta U_f = \Delta I_f \tan \alpha_0$$



发电机激磁曲线

第八章 非线性控制系统分析

8-1 非线性系统的基本问题

8-2 描述函数法

8-3 相平面法

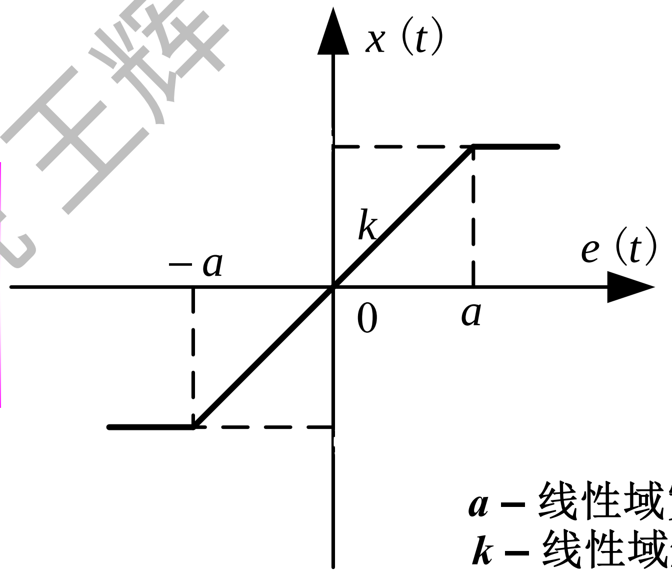
8-4 非线性控制系统分析

8-1 非线性系统的基本问题

典型非线性特性

1.饱和特性

$$x(t)=\begin{cases} ke(t) & |e(t)|<a \\ ka\cdot \text{signe}(t) & |e(t)|>a \end{cases}$$



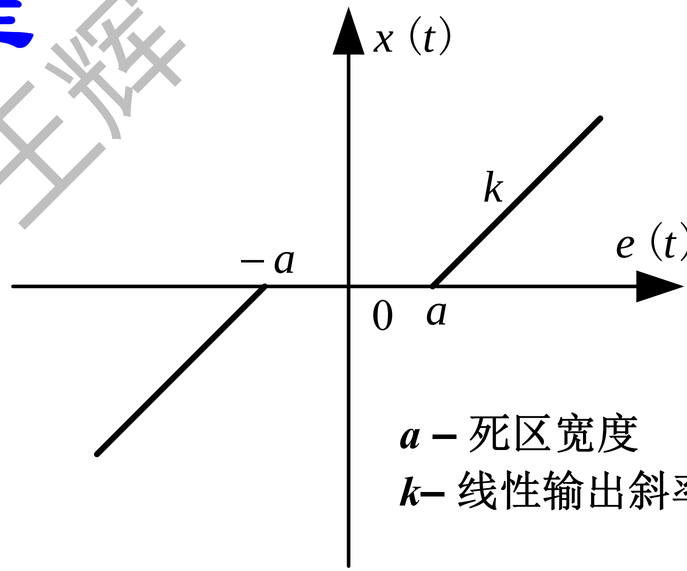
a – 线性域宽度
k – 线性域斜率

符号函数(开关函数)

$$\text{signe}(t)=\begin{cases} +1 & e(t)>0 \\ -1 & e(t)<0 \\ \text{不定} & e(t)=0 \end{cases}$$

典型非线性特性

2.死区(不灵敏区)特性



a – 死区宽度

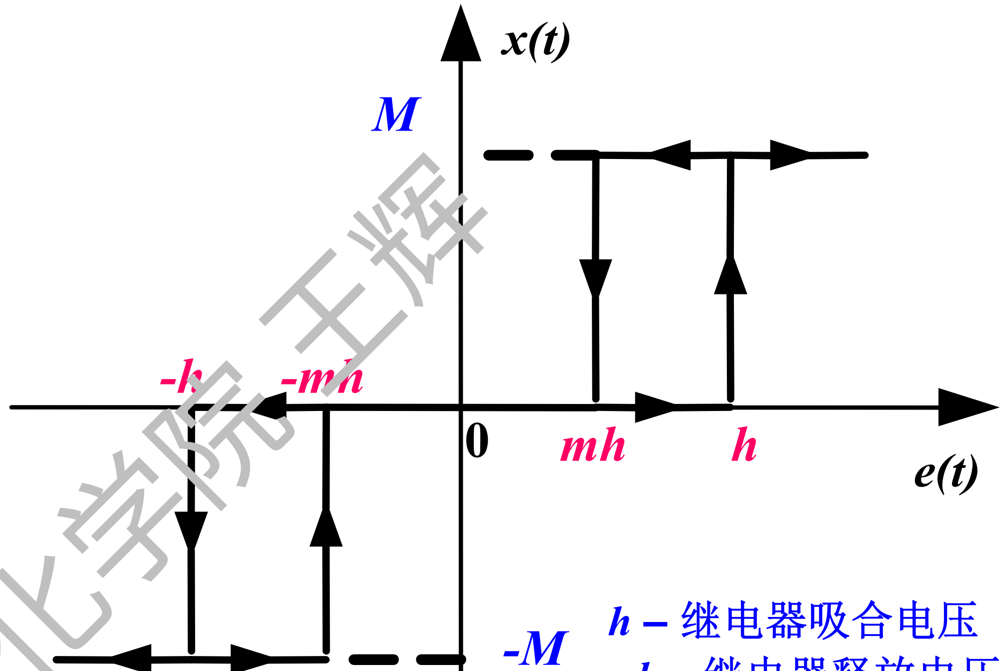
k– 线性输出斜率

$$x(t)=\begin{cases}0 & |e(t)|\le a\\ k[e(t)-a\cdot \mathrm{sign}e(t)] & |e(t)|>a\end{cases}$$

典型非线性特性

3. 继电器特性

---人为特性



h – 继电器吸合电压

mh – 继电器释放电压

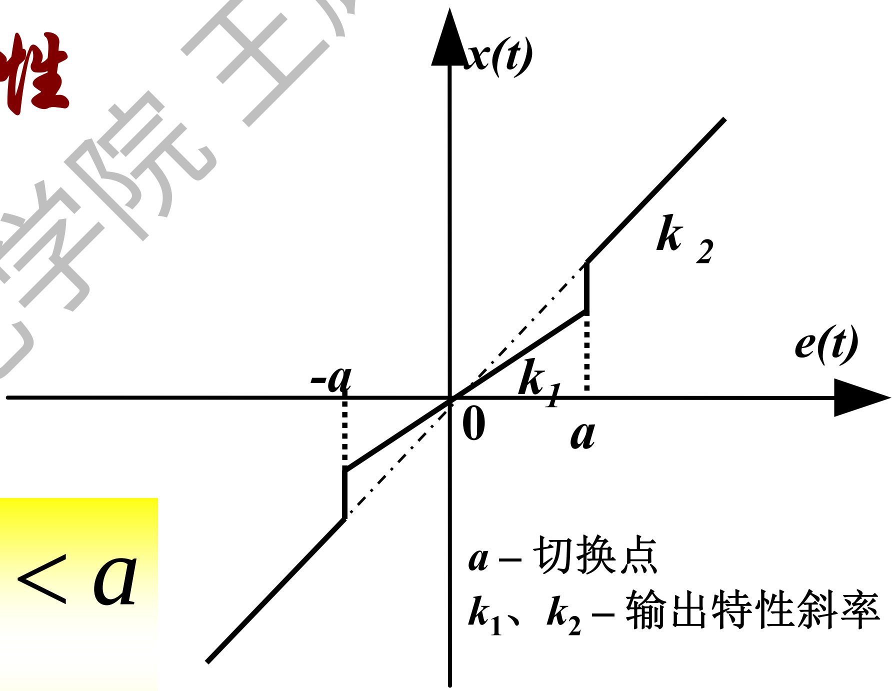
M – 继电器饱和输出

$$x(t)=\begin{cases} 0 & -mh<e(t)<h,\dot{e}(t)>0 \\ 0 & -h<e(t)<mh,\dot{e}(t)<0 \\ M\mathrm{sign}e(t) & |e(t)|\ge h \\ M & e(t)\ge mh,\dot{e}(t)<0 \\ -M & e(t)\le -mh,\dot{e}(t)>0 \end{cases}$$

典型非线性特性

4. 变增益特性

---人为特性



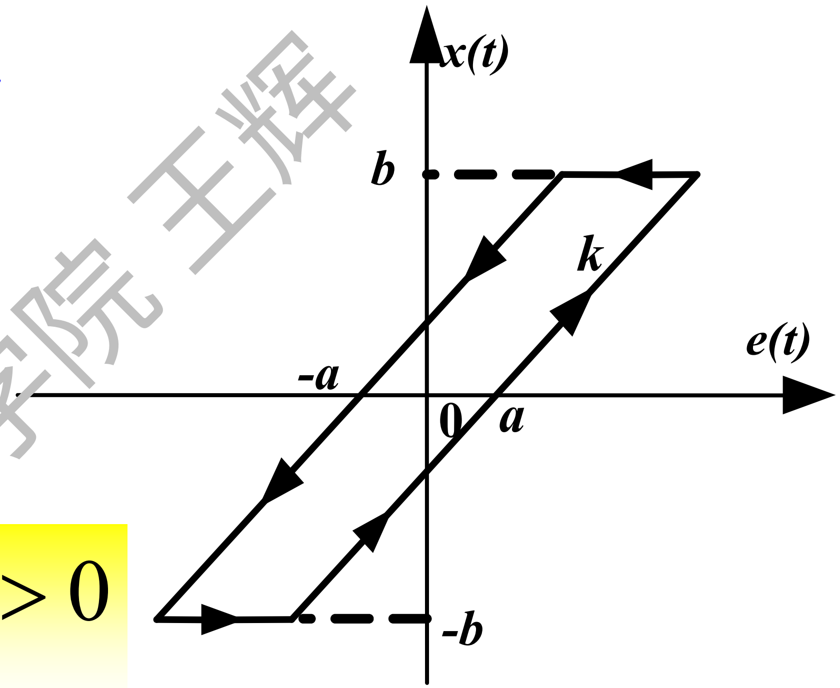
a – 切换点

k_1、k_2 – 输出特性斜率

$$x(t)=\begin{cases} k_1 e(t) & |e(t)|<a \\ k_2 e(t) & |e(t)|>a \end{cases}$$

典型非线性特性

5.间隙(滞环)特性



$$x(t)=\begin{cases} k[e(t)-a] & \dot{e}(t)>0 \\ k[e(t)+a] & \dot{e}(t)<0 \\ b\,\mathrm{sign}\,e(t) & \dot{e}(t)=0 \end{cases}$$

b – 常数

$2a$ – 间隙宽度

k– 输出特性斜率

§8.2 描述函数法

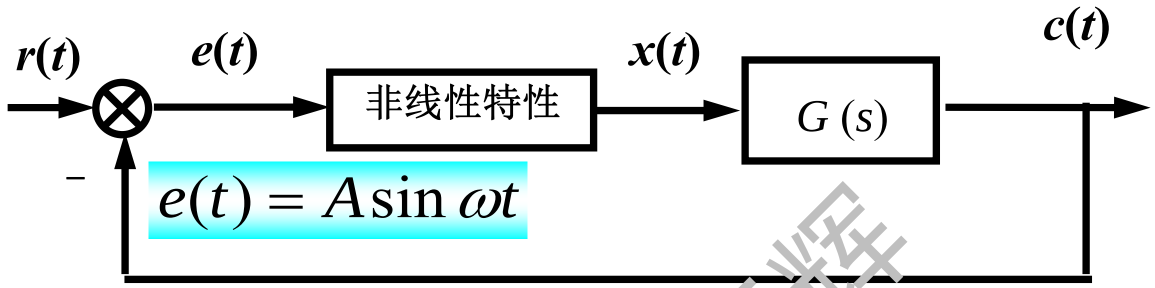
8-2 ※描述函数法

一、描述函数的基本概念

1. 基本思想——谐波线性化

- 谐波线性化是指对于具有本质非线性的非线性元件，用输出信号中的一次谐波分量（基波分量）来代替非线性元件在正弦输入信号作用下的实际输出。

正弦信号输入下非线性特性输出的傅立叶级数展开



$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

直流分量　　　　n次谐波

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)d(\omega t)$$

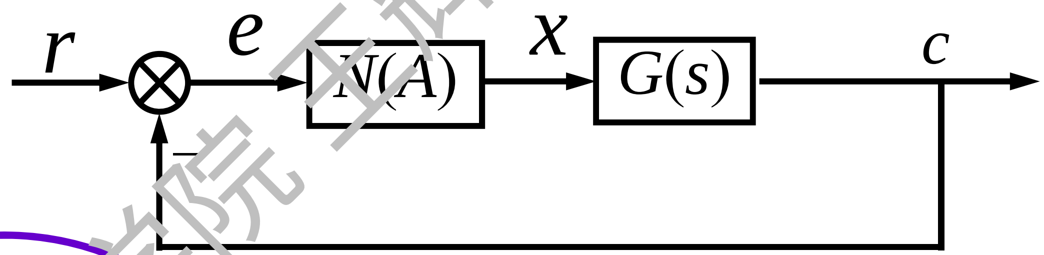
$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin n\omega t d(\omega t)$$

$$X_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2}$$

$$\varphi_n = \arctan(A_n / B_n)$$

负倒描述函数

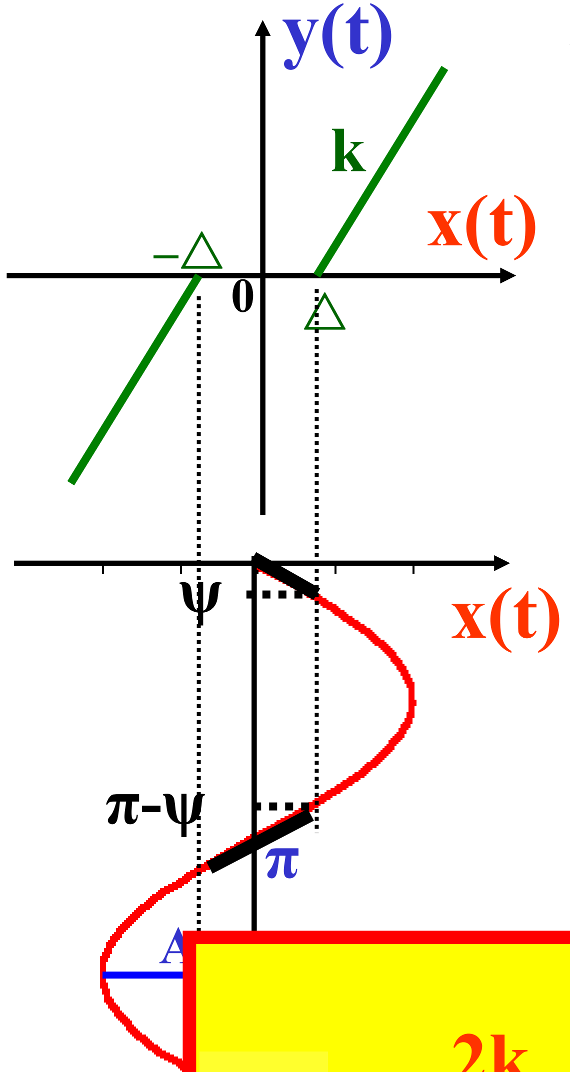


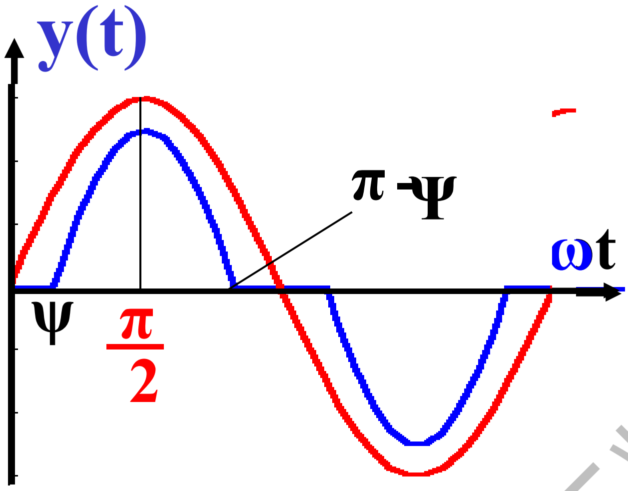
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

典型非线性特性的描述函数

1. 死区特性的描述函数

及负倒描述函数





$$y(t)=\begin{cases} k(x-\triangle) & x>\triangle \\ 0 & |x|<\triangle \\ k(x+\triangle) & x<-\triangle \end{cases}$$

$X(t)= A\sin\omega t$ $y(t) \approx B_1\sin\omega t$

$$N(A)=\frac{B_1+jA_1}{A}=\frac{B_1}{A}$$

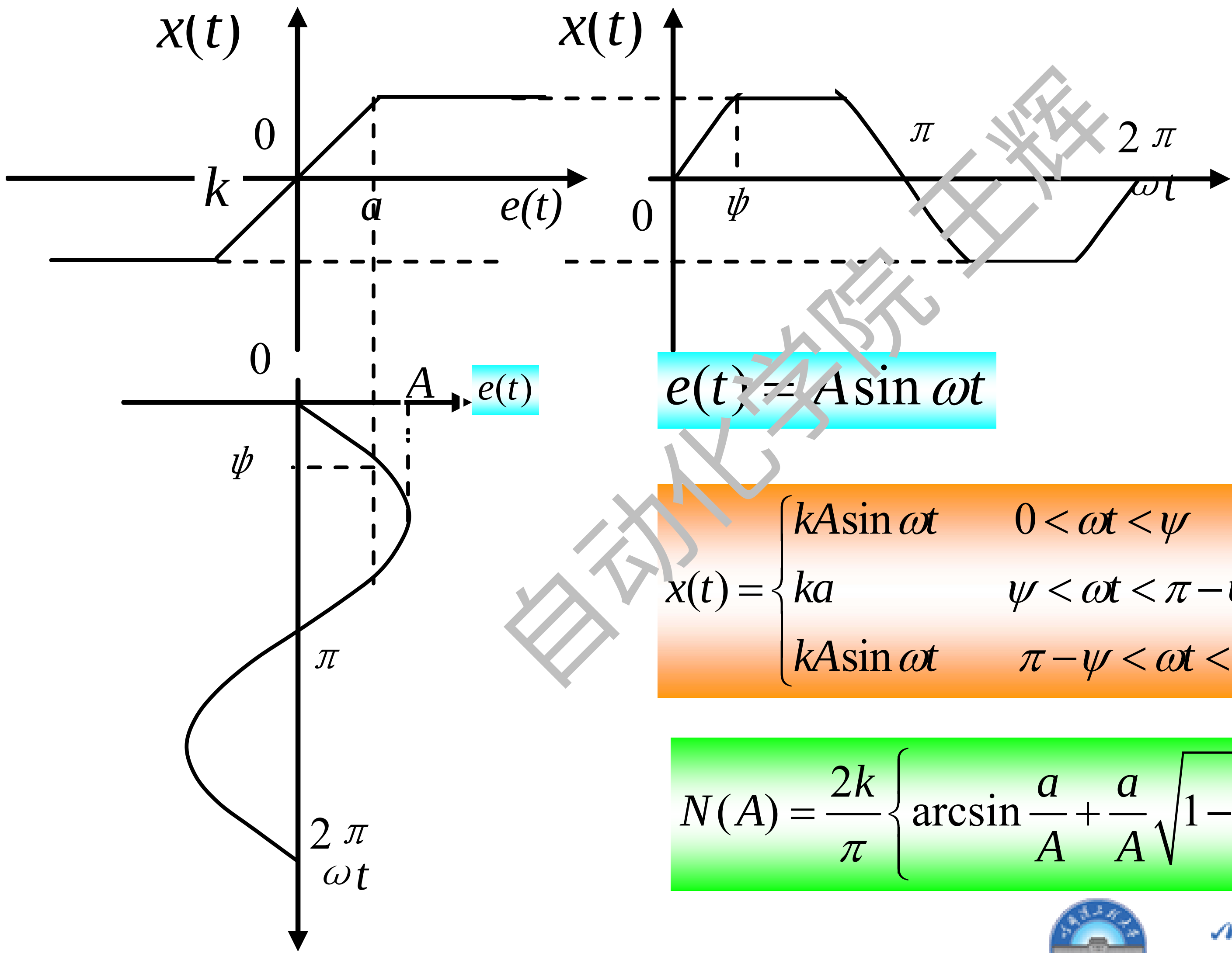
$$\boxed{N(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\Delta}{A}-\frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right]}\quad A>\triangle$$

$x(t)$

死区非线性环节的描述函数

典型非线性特性的描述函数

2. 饱和特性的描述函数

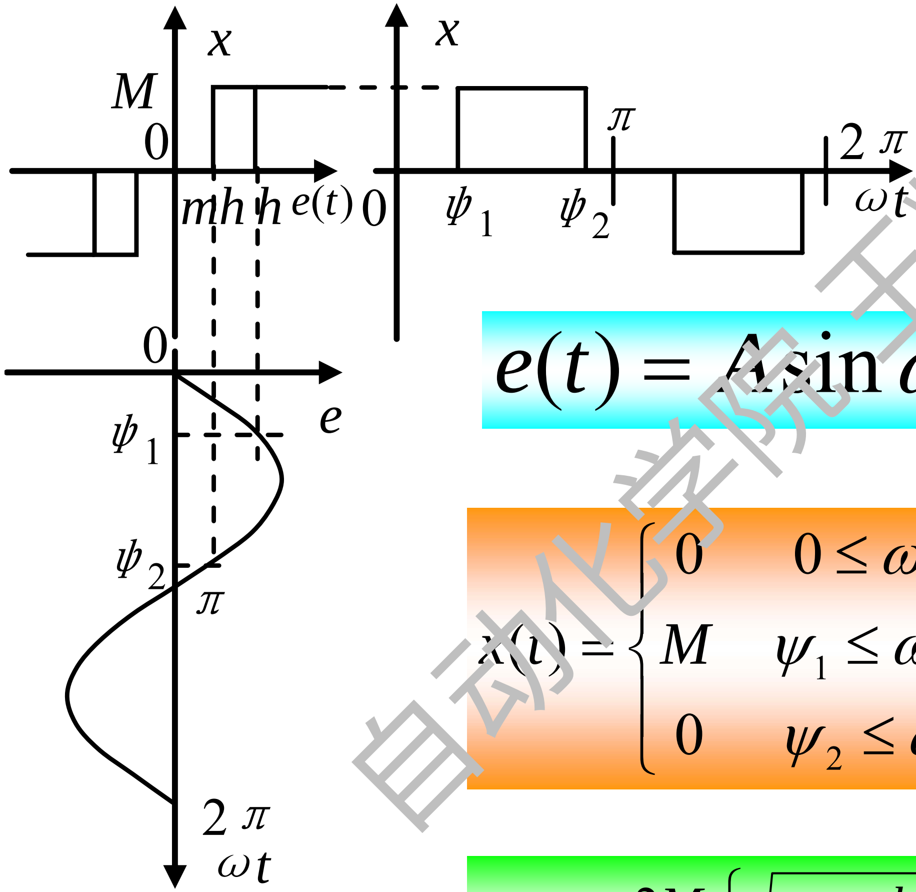


$$e(t) = A\sin\omega t$$

$$x(t)=\begin{cases} kA\sin\omega t & 0<\omega t<\psi \\ ka & \psi<\omega t<\pi-\psi \ , A\ge a, A\sin\psi = a \\ kA\sin\omega t & \pi-\psi<\omega t<\pi \end{cases}$$

$$N(A)=\frac{2k}{\pi}\left\{\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right\}, A\ge a$$

3. 继电特性的描述函数



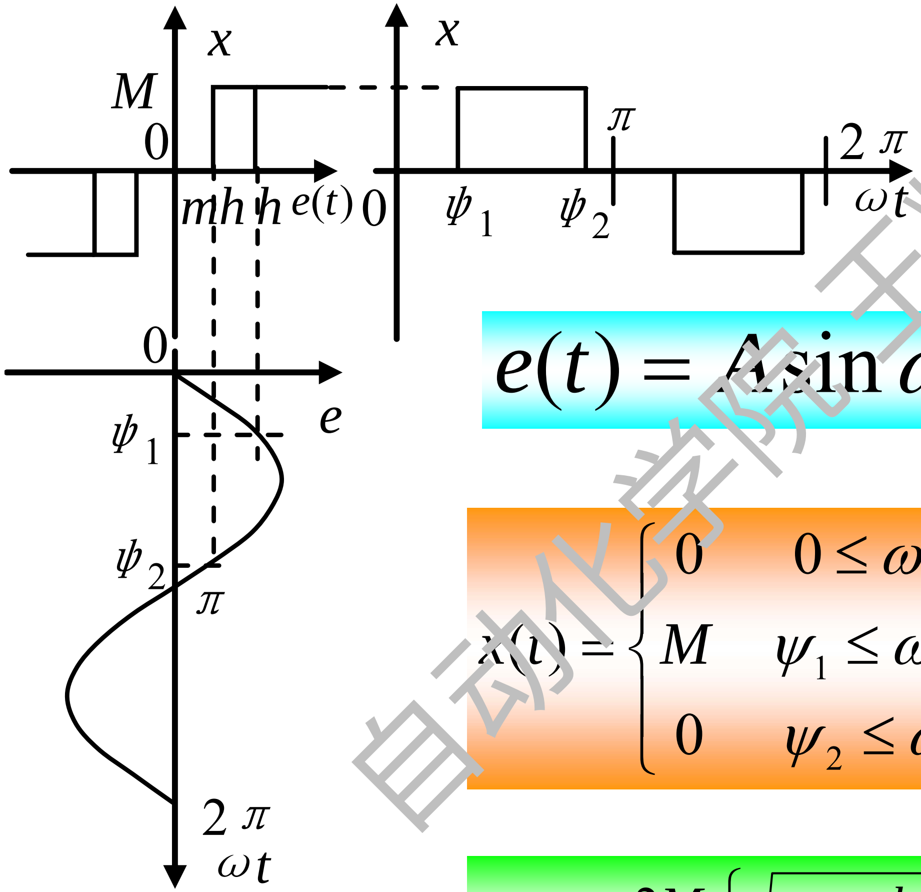
$$e(t) = A\sin\omega t$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le \omega t < \psi_1 \\ M & \psi_1 \le \omega t < \psi_2 \\ 0 & \psi_2 \le \omega t < \pi \end{cases}$$

$$A\sin\psi_1 = h$$
$$\psi_1 = \arcsin(h/A)$$
$$A\sin(\pi - \psi_2) = mh$$
$$\psi_2 = \arcsin(mh/A)$$

$$N(A) = \frac{2M}{\pi A}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{mh}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}\right\} + j\frac{2Mh}{\pi A^2}(m-1)$$

3. 继电特性的描述函数



$$e(t) = A\sin\omega t$$

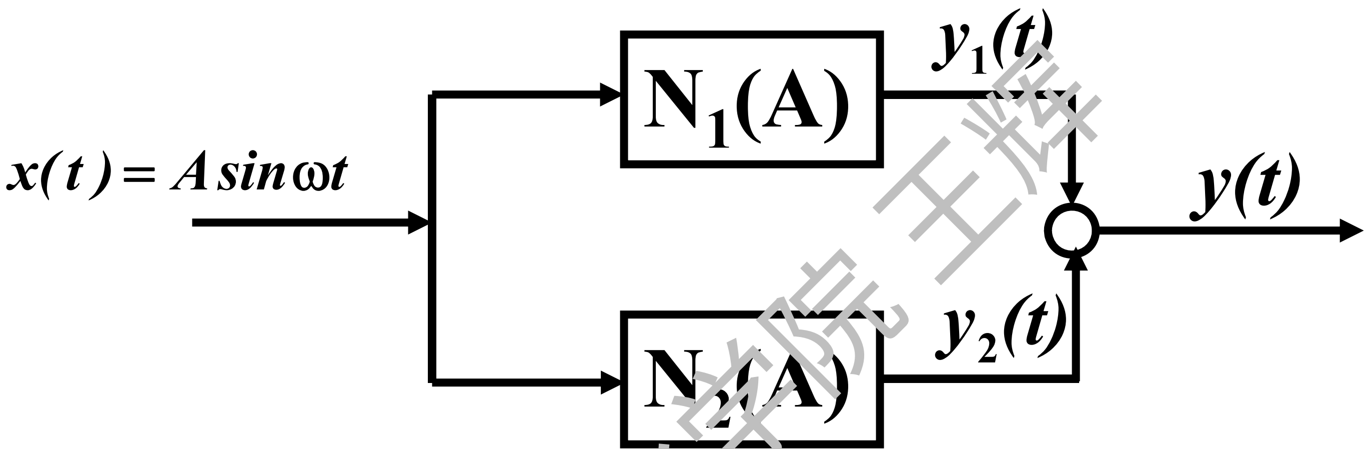
$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le \omega t < \psi_1 \\ M & \psi_1 \le \omega t < \psi_2 \\ 0 & \psi_2 \le \omega t < \pi \end{cases}$$

$$A\sin\psi_1 = h$$
$$\psi_1 = \arcsin(h/A)$$
$$A\sin(\pi - \psi_2) = mh$$
$$\psi_2 = \arcsin(mh/A)$$

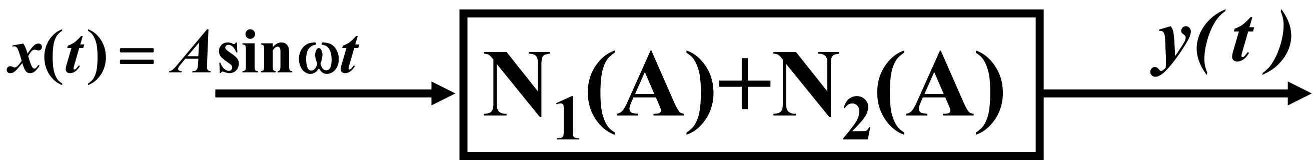
$$N(A) = \frac{2M}{\pi A}\left\{\sqrt{1-(\frac{mh}{A})^2} + \sqrt{1-(\frac{h}{A})^2}\right\} + j\frac{2Mh}{\pi A^2}(m-1)$$

三、非线性系统的简化

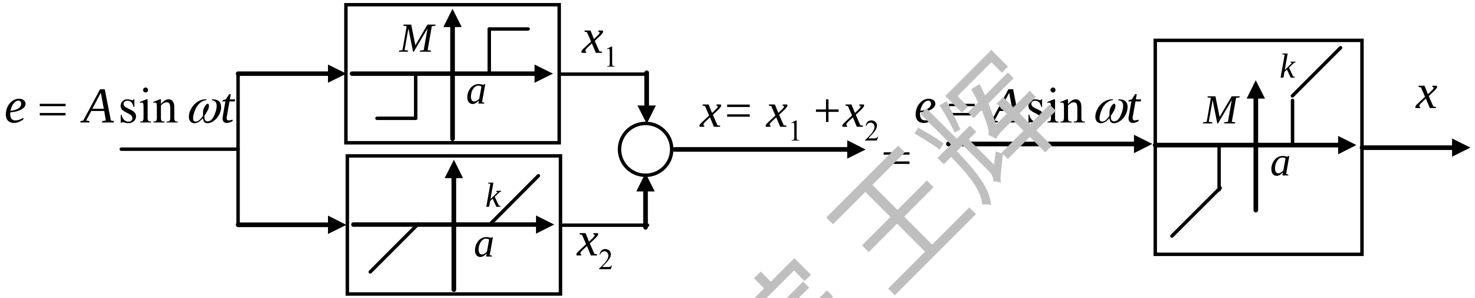
1. 并联非线性环节的等效描述函数



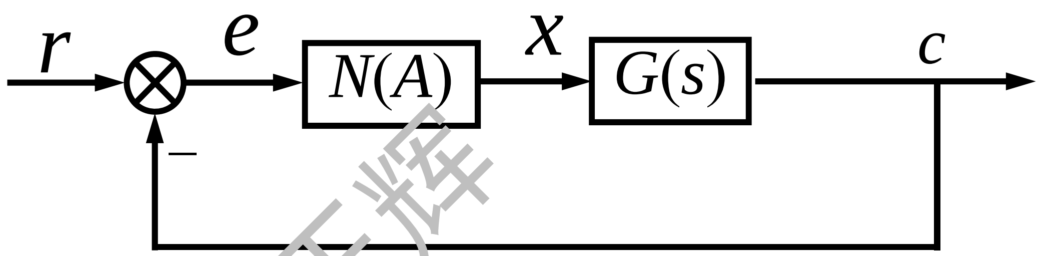
并联非线性特性的等效描述函数为各非线性描述函数的代数和



例：



四、非线性系统稳定性分析的描述函数法



$$\Phi(s)=\frac{N(A)G(s)}{1+N(A)G(s)}$$

$$1+N(A)G(s)=0$$

$$1+N(A)G(j\omega)=0$$

$$G(j\omega)=-\frac{1}{N(A)}$$

负倒描述函数

Nyquist稳定判据

当开环系统有P个极点在[s]平面的右半平面时，闭环系统稳定的充分必要条件是：

当 ω 从 $-\infty \rightarrow \infty$ 变化时，在[G(s)H(s)]平面上开环系统频率特性曲线 Γ_{GH} 应逆时针包围 $(-1,\ j0)$ 点 P 圈

1.非线性系统的稳定性判定规则（P=0）

1)如果$G(j\omega)$由$\omega\to 0$向$\omega\to\infty$移动时，$-\dfrac{1}{N(A)}$始终处于的$G(j\omega)$的左侧，即曲线$G(j\omega)$不包围$-\dfrac{1}{N(A)}$曲线，非线性控制系统稳定；

2)如果$G(j\omega)$由$\omega\to 0$向$\omega\to\infty$移动时，$-\dfrac{1}{N(A)}$始终处于的$G(j\omega)$的右侧，即曲线$G(j\omega)$包围$-\dfrac{1}{N(A)}$曲线，非线性控制系统不稳定；

1.非线性系统的稳定性判定规则（$P=0$） 续

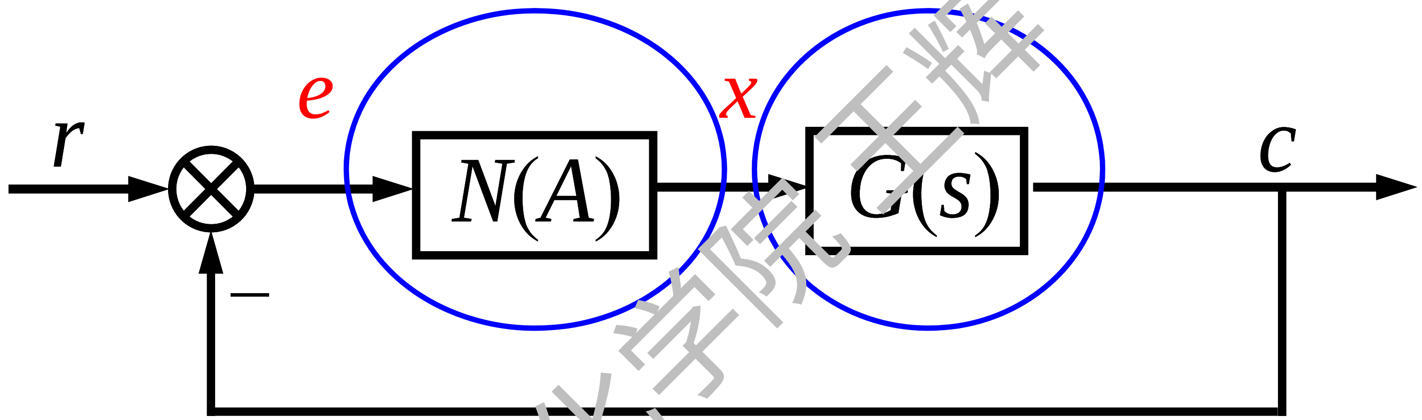
3)如果曲线 $G(j\omega)$ 与曲线 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 相交，非线性控制系统可能在交点处出现自持振荡。

判断原则：沿 $A\uparrow$ 方向，

① 如果 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 由稳定区进入不稳定区，则交点为不稳定平衡点；

②如果 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 由不稳定区进入稳定区，则交点为稳定平衡点，并产生自持振荡。自持振荡的频率和振幅为交点处的 A 和 ω。

2．典型非线性特性对系统稳定性的影响



3. 消除非线性系统自振荡的措施

(1) 改变线性部分的参数，使$G(j\omega)$曲线不与曲线 $-1/N(A)$ 相交;

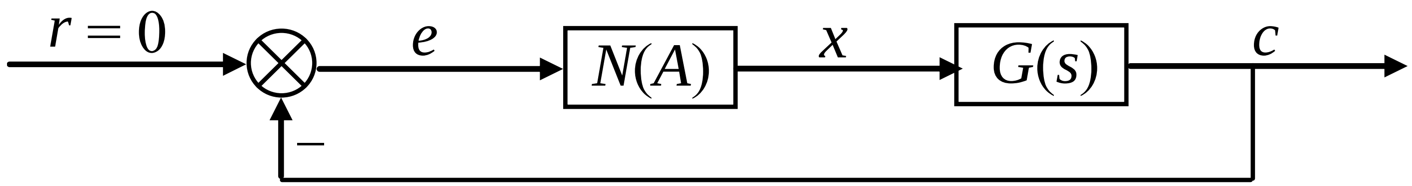
(2) 改变非线性特性的参数，使 $-1/N(A)$ 曲线不与$G(j\omega)$曲线相交;

(3) 增加校正环节，改变$G(j\omega)$曲线形状，不与 $-1/N(A)$ 曲线相交。

描述函数法小结

- 熟练掌握运用描述函数法分析非线性系统的稳定性和自（持）振荡的方法和步骤；
- 并能正确计算自（持）振荡振幅和频率；
- 消除非线性系统自（持）振荡的方法。

例题：非线性系统如图所示



$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)(0.32s+1)}$$

$$K=10.25$$

$$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2},A\geq h$$

$$M=\pi/2,\quad h=0.5$$

极值 $N(A)=\dfrac{2M}{\pi h}$

要求：

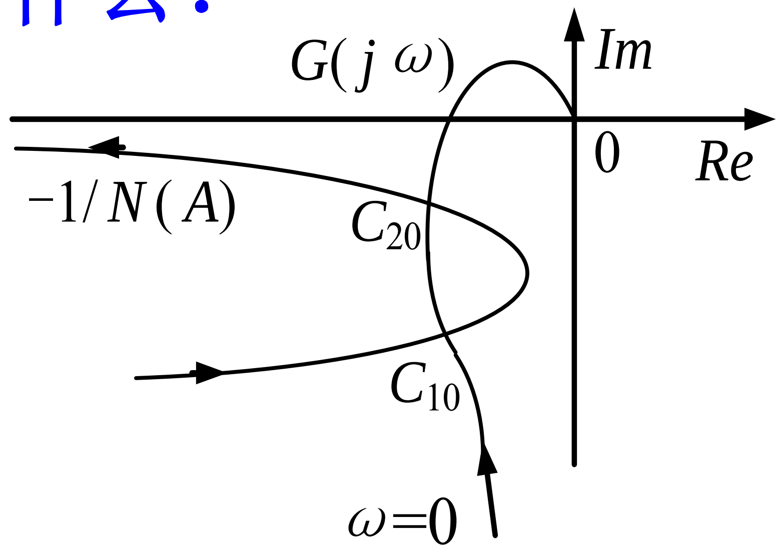
1） **给出$e(t)$的表达式。**

2） **如何消除自（持）振荡？**

例题：非线性系统的非线性环节的负倒描述函数曲线和线性部分的频率曲线如图，且线性部分是最小相位环节。

1.该系统是否存在自持振荡？为什么？

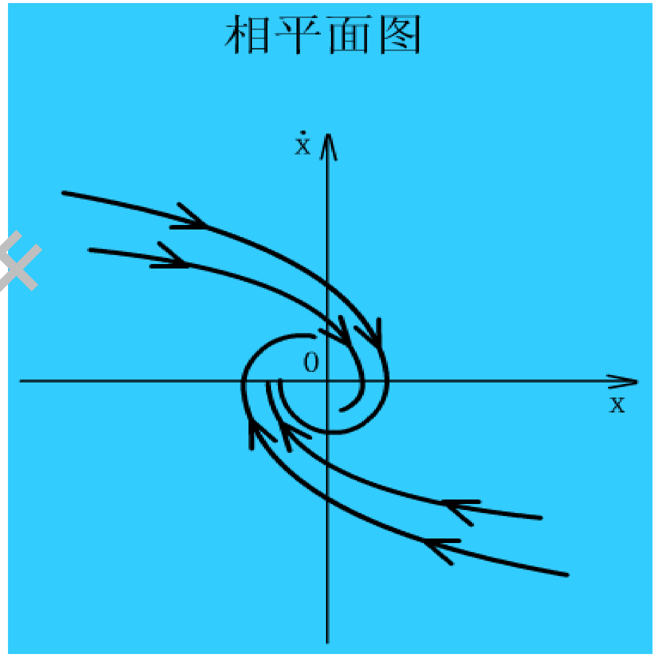
2.若存在自持振荡，稳定自持振荡点是C_{10}还是C_{20}？为什么？



8-3 相平面法

一、相平面的基本概念

二、相轨迹的特点



1. 除奇点外，相平面上各点的斜率唯一。

即除奇点外，相轨迹不相交。

2. 垂直穿越 x 轴 $(\dot{x}=0)$ (奇点除外)。

3.运动方向 $\begin{cases} \text{上半平面} \quad \dot{x}>0 \text{— 从左向右移动} \\ \text{下半平面} \quad \dot{x}<0 \text{— 从右向左移动} \end{cases}$

三、相轨迹的绘制方法 $(x-\dot{x})$

- 1. ※解析法

（1）根据相轨迹斜率方程分离变量积分法；

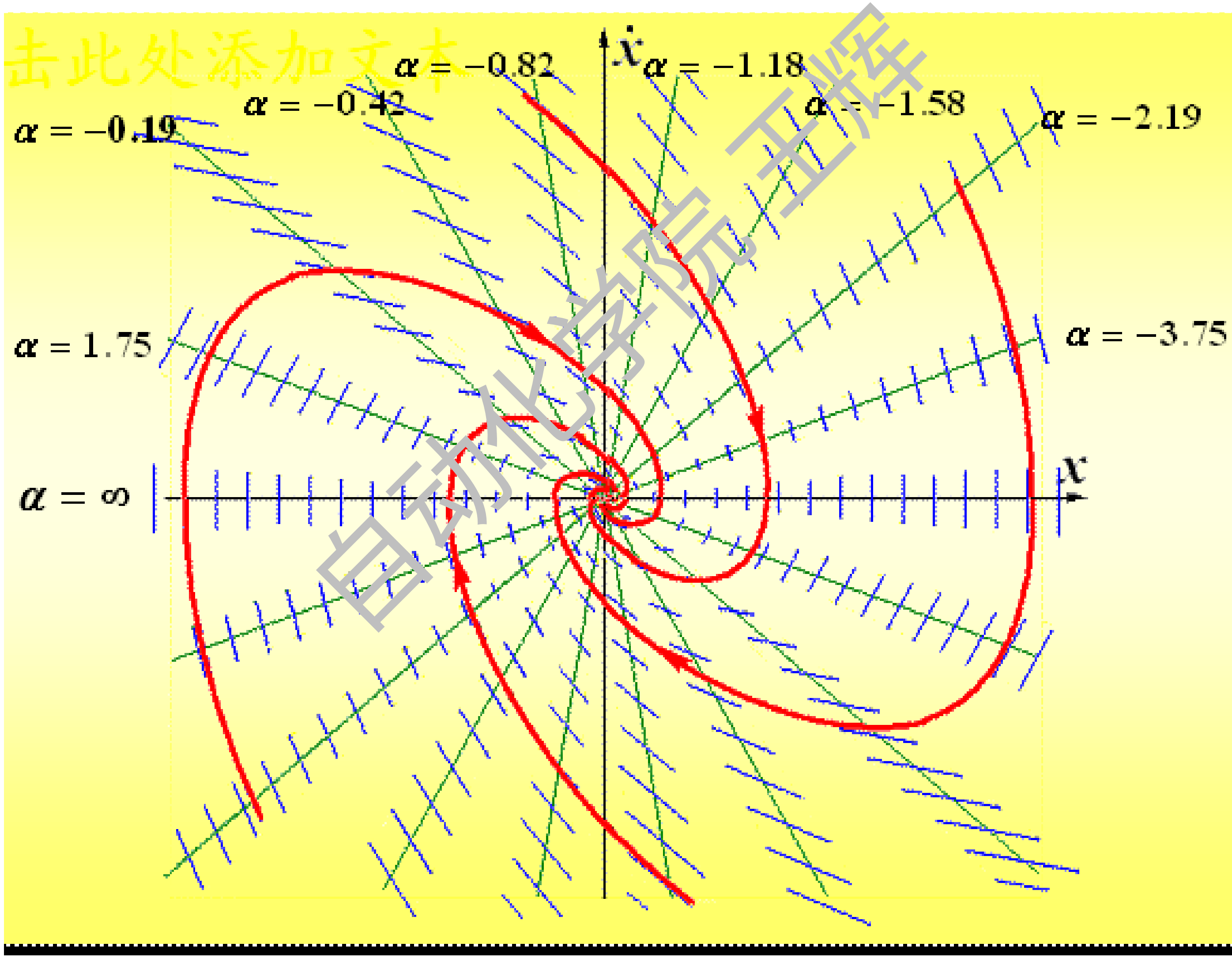
（2）消去参变量 t 法;

例 设二阶系统的微分方程 $\ddot{x}=-M,\ x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=0$

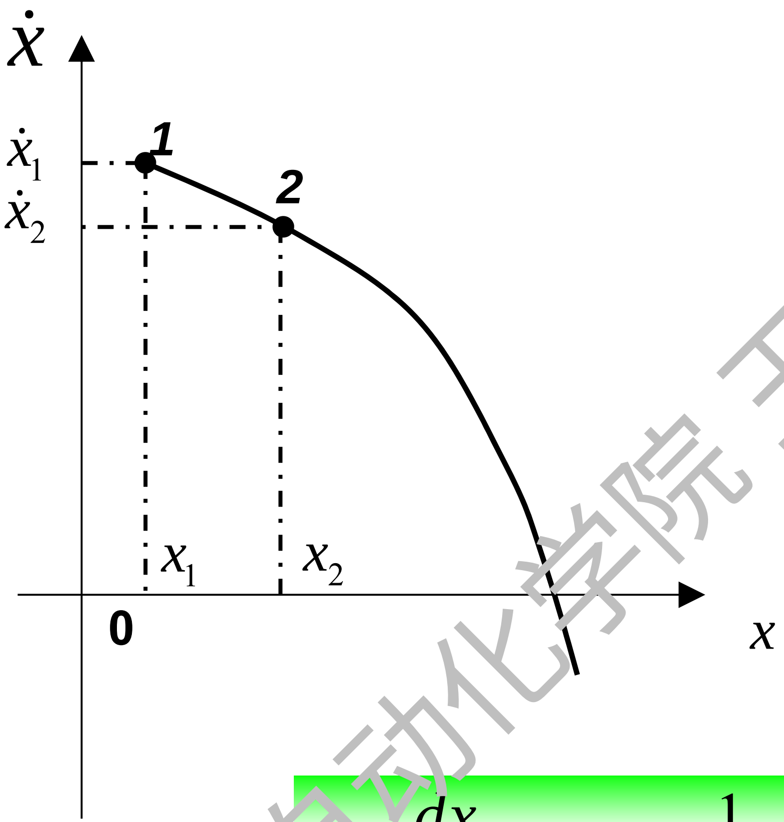
M为常量。试绘制系统的相轨迹。

三、相轨迹的绘制方法

2.等倾线法



四. 由相平面求时间间隔



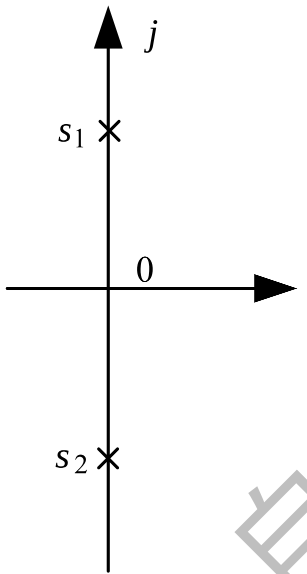
1. ※积分法：$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\dot{x}}dx \Rightarrow \Delta t = \int_{t_2}^{t_1} dt = \int_{x_2}^{x_1} \dfrac{1}{\dot{x}}dx$

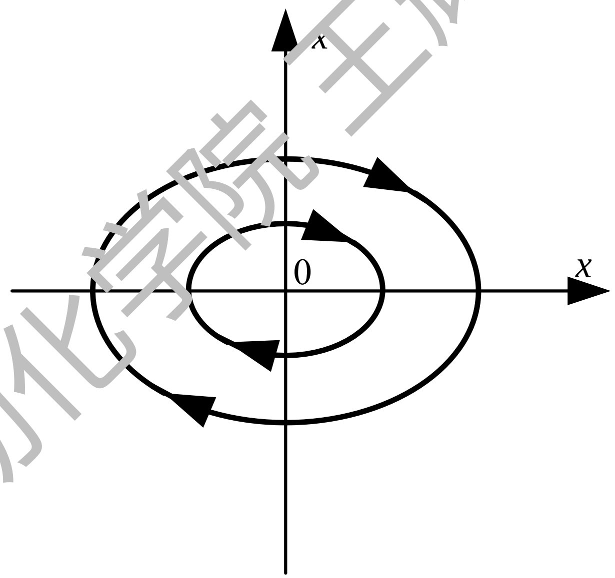
2 .增量法：$\overline{\dot{x}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta x}{\overline{\dot{x}}} = \dfrac{x_2 - x_1}{\dfrac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}}$

五、二阶线性系统的相轨迹

1. $\zeta = 0$

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

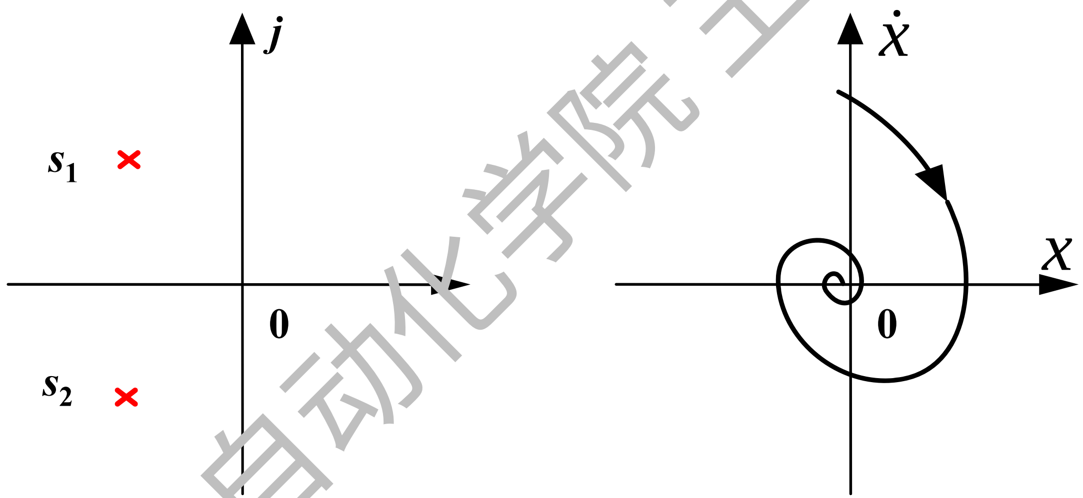




相轨迹围绕原点旋转，不能收敛于原点。奇点称为**中心点**。

2. $0<\zeta<1$

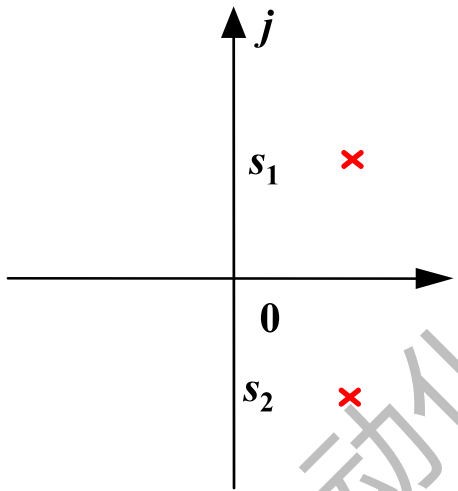
$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

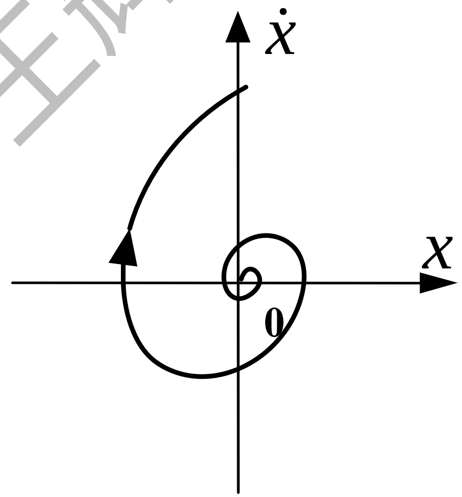


相轨迹为向心螺旋线最终趋于原点。是一个收敛的运动。对应的奇点是稳定的焦点。

3. $-1<\zeta<0$

$$s_{1,2}=\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

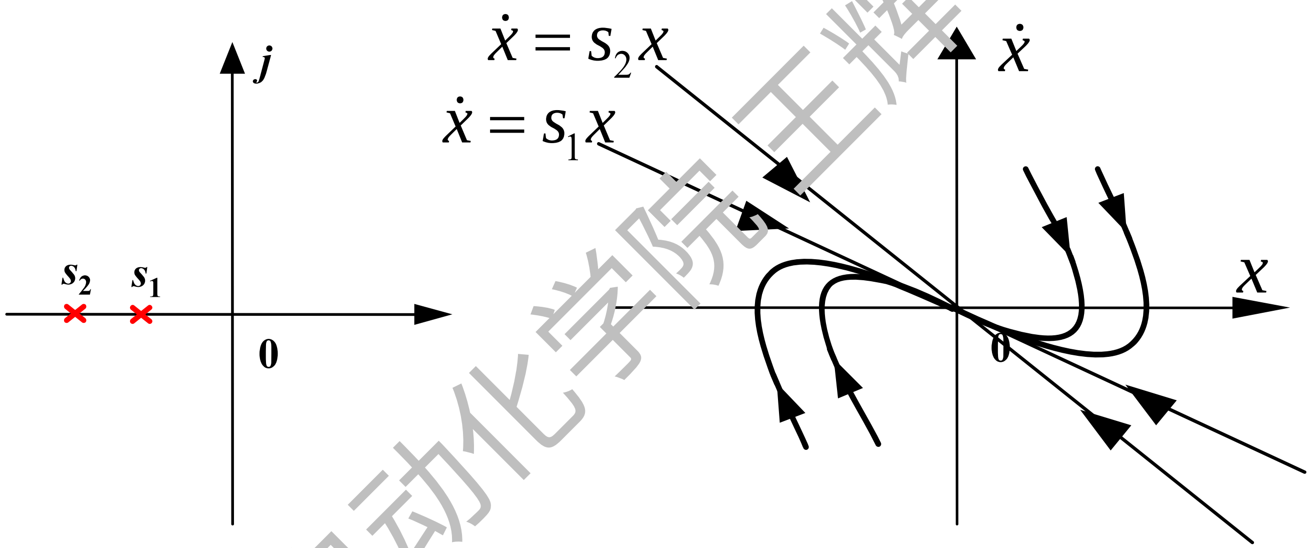




相轨迹为**离心螺旋线**，最终发散至无穷。**奇点**称**不稳定焦点**。

4. $\zeta > 1$

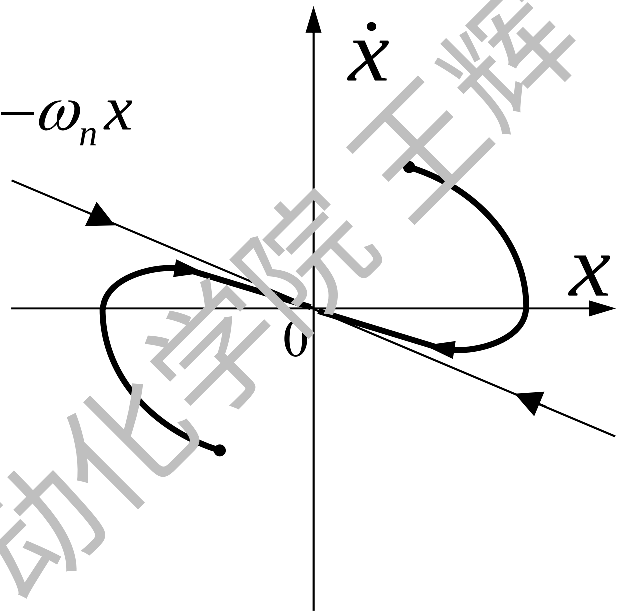
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



当初始点落在斜率分别等于两个根的两条特殊等倾线时，相轨迹沿直线趋于原点；否则，相轨迹是一簇抛物线，始于初始状态，终于奇点。奇点称为**稳定节点**。

$\zeta = 1$

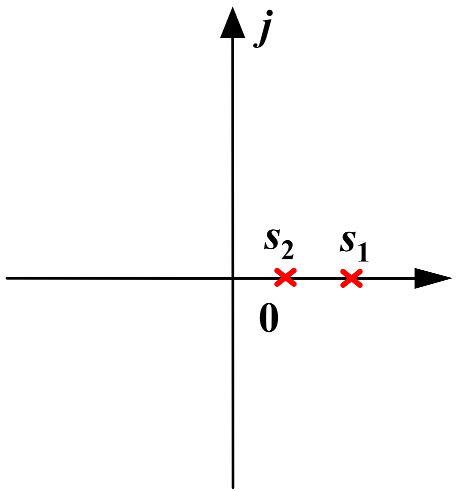
$$s_{1,2} = -\omega_n$$

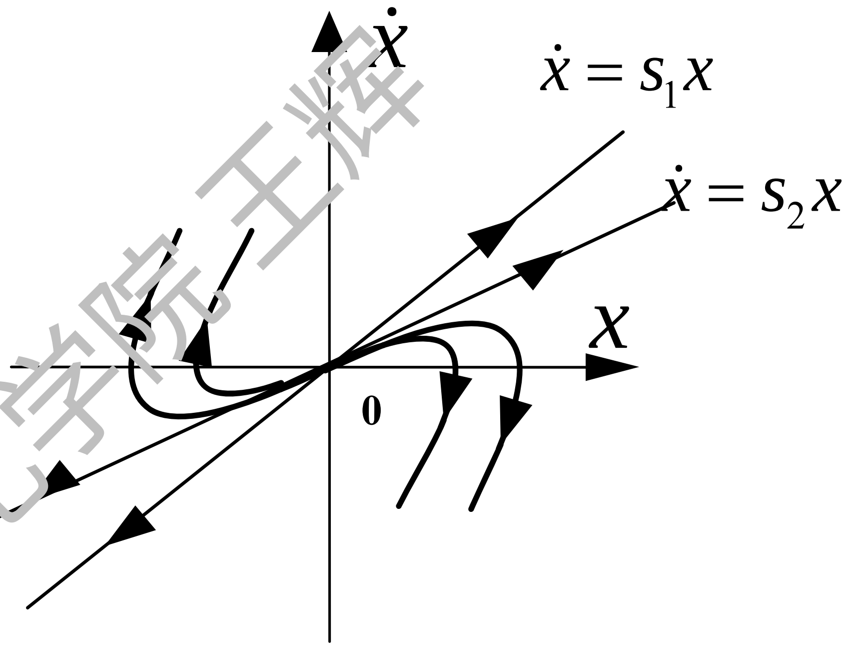


当初始状态满足 $\dot{x}_0 = -\omega_n x_0$ 相轨迹沿直线趋于奇点。否则，相轨迹是一簇抛物线，始于初始状态，终于奇点。奇点称为**稳定节点**。

5. $\zeta < -1$

$$s_{1,2} = |\zeta|\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

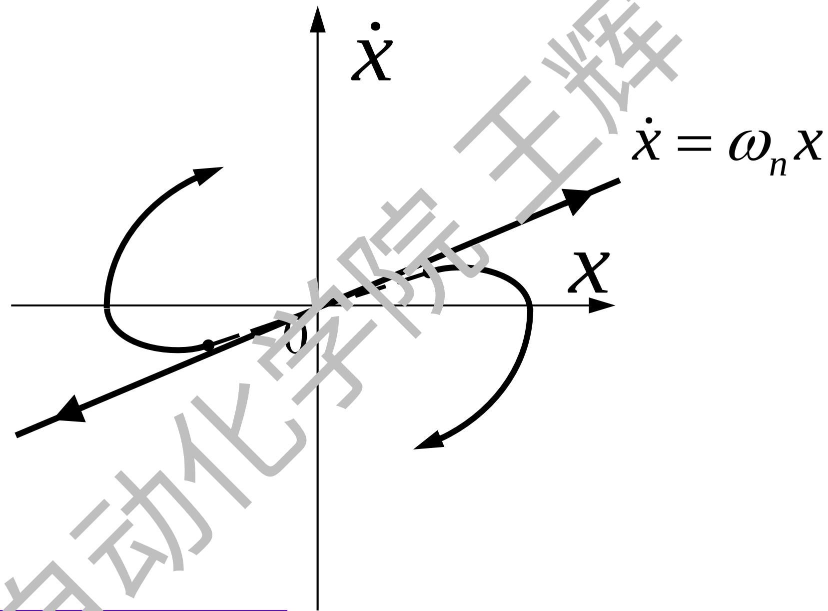




当初始点落在斜率分别等于两个根的特殊等倾线时，相轨迹沿直线远离原点；否则相轨迹是一簇抛物线，起始于初始状态，趋于无穷远，反向延长交于奇点。奇点称**不稳定节点**。

$$\zeta = -1$$

$$s_{1,2} = \omega_n$$

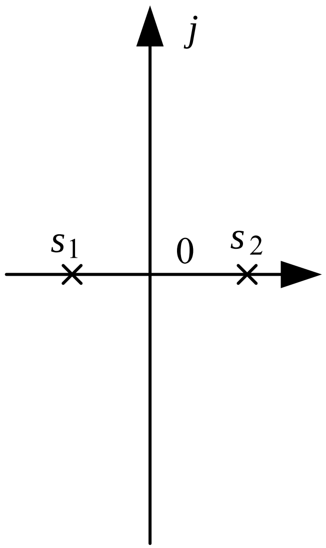


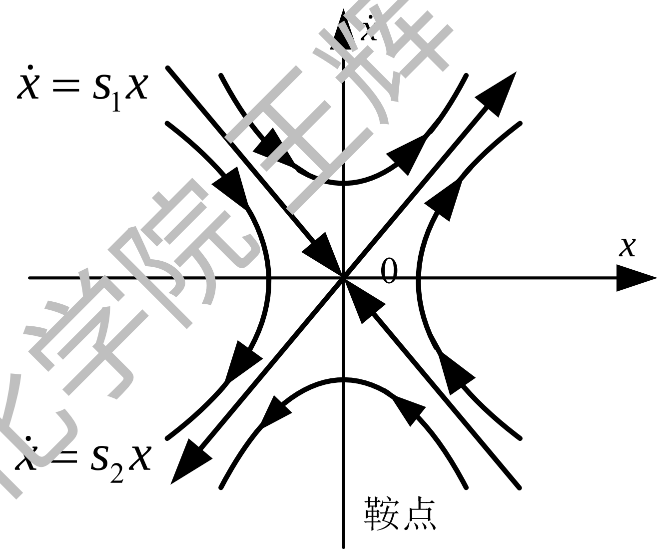
当初始状态满足 $x_0 = \omega_n x_0$ 相轨迹沿直线远离奇点。否则，相轨迹是一簇抛物线，始于初始状态，趋于无穷远，反向延长交于奇点 。奇点称为**不稳定节点**。

6.

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}-\omega_n^2 x=0$$

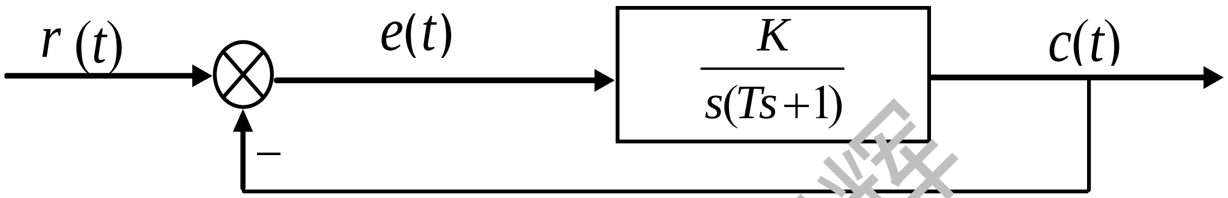
$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2+1}$$





只有初始值落在负斜率的等倾线 $\dot{x}=s_1x=(-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2+1})x$ **上，运动将趋于原点。即使这种情况，如受到微小的扰动，将偏离该轨迹，发散至无穷。奇点称为鞍点。**

例： **设系统开始处于静止状态，试利用相平面法对系统进行分析。其中，**



1）： $r(t) = R \bullet 1(t), R$为常数

2）： $r(t) = \upsilon \bullet t, \upsilon$为常数

六、非线性系统的相平面分析

1. 非线性系统的相平面分析原理

- 非线性系统都可通过几个分段的线性系统来近似。因此非线性系统的相平面可相应的划分成若干不同区域。

- 每个区域内的相轨迹都是线性系统相轨迹。根据每个区域的奇点类型可判断系统每个区域的稳定性。

2.非线性系统的相平面分析中的几个概念

- 在不同区域的边界上相轨迹要发生转换，区域的边界线称为开关线。
- 若该奇点位于对应的区域内，则称为实奇点。
- 若奇点位于对应的区域外，则称为虚奇点。表示属于该区域的相轨迹永远到不了该奇点。

3.相平面法分析非线性系统的步骤

1) 将系统中的非线性特性用分段的直线特性来表示，并写出非线性特性数学表达式；

※ 2）在相平面选择合适的坐标，常用 $e-\dot{e}$ 或 $c-\dot{c}(令r=0)$ 。

3)根据系统线性部分，写出系统二阶系统的运动方程；结合非线性特性将相平面分成几个区域，写出每个区域内的线性系统微分方程。

4) 根据各运动方程式的条件方程，在相平面上做出开关线。

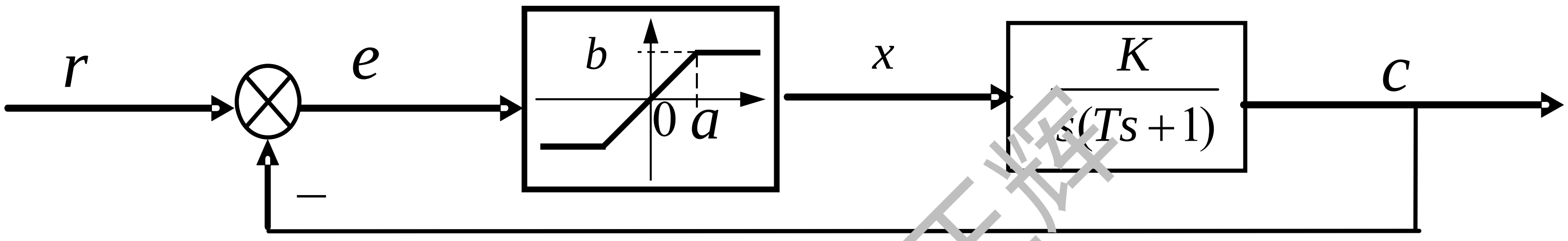
3.相平面法分析非线性系统的步骤

- 5)从系统初始值所在的区域开始，依次画出各区域内的线性系统的相轨迹（解析法或者等倾线法）

注意：前一个线性区域的相轨迹到达开关线处的交点就是下一个线性区域的初始值，以此类推绘出所有的线性区域的相轨迹图；

- 6)根据相轨迹，判断非线性控制系统的运动特性。

例1：含饱和特性的非线性系统分析

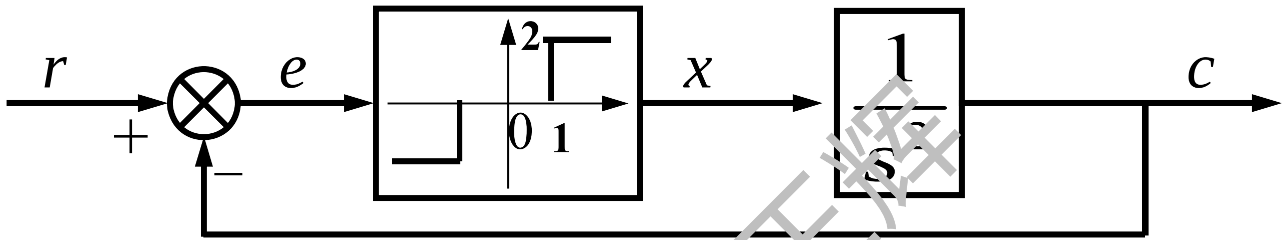


1）：$r(t)=R\cdot 1(t)$, R为常数

2）：$r(t)=\upsilon\cdot t$, υ为常数

$$x=\begin{cases} e, & |e|\le a \\ b, & e>a \\ -b, & e<-a \end{cases}$$

例3：具有继电器特性的非线性系统分析



非线性控制系统如图，求初始值 $c(0)=c_0$，

$\dot{c}(0)=0$ 的相轨迹图 $c-\dot{c}$ 。

本章重点

1. 描述函数法

- 熟练掌握运用描述函数法分析非线性系统的稳定性，判断是否产生自振荡；
- 正确计算产生自振荡的振幅和频率；
- 消除自振荡的方法。

2. 相平面法

- 熟练掌握典型线性二阶系统的相平面图及其特征；
- 正确求出对于非线性系统在每个线性区的相轨迹方程；
- 如果发生自持振荡，计算振幅和周期。